De l'irréductibilité des polynômes différentiels à une variable et à coefficients sur un corps différentiel

Alain Wazner

Introduction

Un des intérêts des connexions est qu'elles permettent par le lemme du vecteur cyclique de ramener l'étude de l'anneau non commutatif des polynômes différentiels à celle d'un opérateur particulier d'ordre 1 : une connexion vectorielle. Par analogie avec les algèbres commutatives de matrices, l'étude des applications linéaires et de la réduction d'endomorphismes est connectée à celle de polynômes les caractérisant. Pour des applications linéaires sur un corps la théorie des diviseurs élémentaires permet, grâce aux notions d'espaces cycliques ou stables, la factorisation de polynômes en polynômes irréductibles. Le but est, dans cet article, pour les connexions sur des corps différentiels de traduire certaines notions propres aux polynômes d'endomorphismes linéaires sur des corps.

Sur les anneaux non commutatifs unitaires

Dans cette section A sera un anneau unitaire, non nécessairement commutatif, $\mathcal{U}_A$ sera son groupe des inversibles et dans tout l'article on obtiendra les mêmes énoncés en remplaçant gauche ou son abréviation par droite ou son abréviation et en renversant les produits.

Diviseurs, p.g.c.d., p.p.c.m., éléments irréductibles

Définitions :

- Soit $a \in A$, on dit que $b \in A$ est un diviseur de A à gauche si $a \in (b)_g$, où $(b)_g$ est l'idéal à gauche engendré par b. Autrement dit, si $\exists c \in A$ tel que $a = cb$ ce qu'on écrira $b_{|g}a$.
- Si $E \subset A$ alors un p.g.c.d. à gauche des éléments de E, s'il en existe, est un élément $d \in A$ tel que $\forall e \in E,\ d_{|g}e$ et $\big(\forall e \in E,\ c_{|g}e\big) \Rightarrow c_{|g}d$.
- Si E est une partie *finie* de A alors un p.p.c.m. à gauche des éléments de E, s'il en existe, est un élément $p \in A$ tel que $\forall e \in E,\ e_{|g}p$ et $\big(\forall e \in E,\ e_{|g}q\big) \Rightarrow p_{|g}q$.
- Un idéal à gauche est un sous-groupe additif de A stable pour la multiplication à gauche par tout élément de A.
- Un idéal à gauche $I \subset A$ est de type fini à gauche s'il est engendré par un nombre fini d'éléments de A.
- Un anneau A est nœthérien à gauche si tout idéal à gauche $I \subset A$ est de type fini à gauche.
- Un idéal à gauche $\mathcal{I}$ de A est dit monogène si et seulement $(\exists i \in A)\ \mathcal{I} = \{ai / a \in A\}$.

- Un anneau A est principal à gauche si tout idéal à gauche $\mathcal{I}$ de A est monogène.
- Un anneau A est gradué euclidien à gauche si
  - Il est intègre.
  - Il existe un stathme euclidien à gauche : une application $\nu : A\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ telle que $(\forall a, b \in A\backslash\{0\}), (\exists! q, r \in A)$ *avec* $a = qb + r$ *et* $(r = 0$ *ou* $\nu(r) < \nu(b))$. r, q sont appelés le *reste* et le *quotient* de la *division euclidienne à gauche* de a par b.
  - $(\forall p, q \in A)\ \nu(pq) = \nu(qp) = \nu(p) + \nu(q)$.
- Dans un anneau A principal à gauche un élément a sera dit irréductible à gauche si et seulement si l'idéal $(a)_g$ est propre et maximal pour l'ordre de l'inclusion.

Propriétés :

- Soit A un anneau nœthérien à gauche alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

  (1) Tout idéal de A à gauche est de type fini.

  (2) Toute suite croissante d'idéaux de A à gauche est stationnaire.

  (3) Tout ensemble non vide d'idéaux de A à gauche a un élément maximal pour l'inclusion

- Tout anneau principal à gauche est nœthérien à gauche.
- Tout élément irréductible d'un anneau unitaire gradué euclidien à gauche n'est pas le produit de deux éléments de $A\backslash\mathcal{U}_A$ où $\mathcal{U}_A$ est le groupe multiplicatif des inversibles de A.
- Tout anneau euclidien à gauche est principal à gauche.
- Dans un anneau unitaire gradué euclidien à gauche et qui n'est pas un corps il existe des éléments irréductibles à gauche et tout élément qui n'est pas inversible est divisible à gauche par un irréductible à gauche.

Preuves :

Lemme : $(a)_g \subset (b)_g \Leftrightarrow b_{|g}a$:

$(a)_g \subset (b)_g \Leftrightarrow \{za/z \in A\} \subset \{zb/z \in A\}$

$a \in (a)_g \Rightarrow (\exists z \in A),\ a = zb \Rightarrow b_{|g}a.$

$b_{|g}a \Rightarrow (\exists z \in A),\ a = zb \Rightarrow \{xa/x \in A\} \subset \{xzb/x \in A\} \Rightarrow (a)_g \subset (b)_g.$

- Soit A un anneau nœthérien à gauche alors :
  - $(1) \Rightarrow (2)$:
    Soit $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \ldots$ une suite croissante d'idéaux de A à gauche alors, comme la suite est croissante, la réunion $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un idéal de A à gauche, I

est engendré par k éléments de A $a_1, \ldots, a_k$ qui sont dans I_N pour un $N \in \mathbb{N}$, on a alors $I = I_N$ et la suite des idéaux est stationnaire après le rang N.

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  Soit E un ensemble non vide d'idéaux de A à gauche. Si E n'a pas d'élément maximal alors on construit une suite d'idéaux à gauche de A qui contredit (2) : on prend I_1 dans E quelconque, puis, comme I_1 n'est pas maximal, on trouve $I_2 \in E$ avec $I_1 \subsetneq I_2$ etc...
- $(3) \Rightarrow (1)$:
  Soit I un idéal de A à gauche et E l'ensemble des idéaux de A à gauche contenus dans I et type fini. L'ensemble E n'est pas vide car il contient $(0)_g$. Soit J un élément masimal de E supposons que $J \neq I$ alors soit $a \in I \backslash J$; $J + (a)_g$ est encore de type fini, contenu dans I et contenant strictement J, ceci contredit la maximalité de J. On a donc $J = I$ et I est de type fini puisqu'il est dans E.

- Dans un anneau principal à gauche tout idéal est monogène donc de type fini.
- Soit A un anneau unitaire gradué euclidien à gauche :

$1 = 1 \times 1 \Rightarrow \nu(1) = \nu(1) + \nu(1) \Rightarrow \nu(1) = 0$
Soit $u \in \mathcal{U}_A$ alors :

$$\begin{array}{ll} u \times u^{-1} & = \ 1 \\ & \Downarrow \\ \nu(u) + \nu(u^{-1}) & = \ 0 \\ & \Downarrow \\ \nu(u) & = \ \nu(u^{-1}) = 0 \end{array}$$

puisque $Im(\nu) = \mathbb{N}$. Nous en déduisons que si $a \notin \mathcal{U}_A$ alors $\nu(a) > 0$. Soit i un élément irréductible d'un anneau euclidien à gauche. Supposons que $i = ab$ avec $a,\ b \in A \backslash \mathcal{U}_A$ alors $(b)_g \subset (i)_g$. Effectuons la division euclidienne à gauche de a par b alors $a = qb + r$ où $\nu(r) < \nu(b)$ puis $\nu(q) + \nu(b) = \nu(a - r) = \nu(a)$ (puisque $\nu(r) < \nu(a)$) soit $\nu(q) = \nu(a) - \nu(b)$. L'élément $qb \in (b)_g$ n'appartient pas à $(i)_g$ puisque $\nu(qb) = \nu(a) < \nu(i)$ ce qui contredit que l'idéal à gauche $(i)_g$ est maximal.

- Si $\mathcal{I}$ est un idéal de A euclidien à gauche et $i \in \mathcal{I}$ tel que $\nu(i)$ soit minimal. Soit $a \in \mathcal{I}$ on effectue la division euclidienne à gauche de a par i : $a = iq + r$ avec $\nu(r) = 0$ ou $\nu(r) < \nu(i)$. $\nu(r) = 0$ puisque $\nu(i)$ est minimal. Il suit que $\mathcal{I} = (i)_g$.

- Sans utilisation de l'axiome du choix, l'assertion $\exists a \in A,\ \nu(a) = Min_{P \in A \backslash \mathcal{U}_A} \nu(P)$ est vraie. A est euclidien à gauche et l'assertion

$\forall b \in A,\ (\exists! q, r)(a = qb + r) \wedge (\nu(r) < \nu(a))$ entraîne, puisque $\nu(a)$ est minimal, $r = 0$ ce qui entraîne $b_{|g}a$ soit $(a)_g \subset (b)_g$: $(a)_g$ est un idéal de A à gauche maximal et propre puisque $\forall x \in A,\ \nu(xa) = \nu(x) + \nu(a) \geq \nu(a) > 0$.

Propriété : Si A est un anneau unitaire gradué euclidien à gauche alors :

(1) Si $E \subset A$, l'ensemble des p.g.c.d. à gauche de E est l'ensemble des $a \in A\backslash\{0\}$ tels que $\sum_{e\in E}(e)_g = (a)_g$.

(2) L'ensemble des p.p.c.m. à gauche de $(a_1, \ldots, a_n)$ est l'ensemble des $a \in A\backslash\{0\}$ tels que $\cap_{i=1}^{n}(a_i)_g = (a)_g$.

Preuve :

(1) **Tout générateur de $\sum_{e\in E}(e)_g$ est un p.g.c.d. de E :**
Soit $E \subset A$ alors $\sum_{e\in E}(e)_g$, l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ où $a_i \in A$ et $e_i \in E$, est un idéal à gauche donc $(\exists a \in A) \sum_{e\in E}(e)_g = (a)_g$ ce qui équivaut à

$\exists c \in A \forall (a_1,\ \ldots, a_n) \in A^n\ \forall (e_1,\ \ldots, e_n) \in E^n$
$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = ca.$

En particulier pour $n = 1$, $a_1 = 1$ on a $\exists c \in A \forall e \in E,\ e = ca$ ce qui équivaut à

$(\forall e \in E), a_{|g} e$.
a est un diviseur commun à chaque élément de la partie E nous montrons alors que c'est le «plus grand».
De $\sum_{e\in E}(e)_g = (a)_g$ se déduit $a \in \sum_{e\in E}(e)_g$.
$\exists(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in A^n \exists(e_1^*,\ \ldots,\ e_n^*) \in E^n$
$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$.
Soit d tel que $\forall e \in E,\ d_{|g} e$ alors

$$\forall i \in \{1,\ \ldots,\ n\} \exists \beta_i \in A,\ e_i^* = \beta_i d$$

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i d \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i\right) d \end{aligned}$$

$d_{|g} a$ et a est un p.g.c.d. de E.

Tout p.g.c.d. de E est un générateur de $\sum_{e\in E}(e)_g$:
Nous distinguons deux cas

- E est un ensemble fini. Nous posons $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit d un diviseur commun de $a_1, \ldots, e_n$ alors $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $(e_i)_g \subset (d)_g$. En particulier si m est un p.g.c.d. de E, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $(e_i)_g \subset (m)_g$ ce qui entraîne $\sum_{i=1}^{n}(e_i)_g \subset (m)_g$. Mais d'après ce qui précède $\sum_{i=1}^{n}(e_i)_g = (m')_g$ où m' est un p.g.c.d. de E. On a donc $(m')_g \subset (m)_g$. Ceci étant vrai pour tout m, m' p.g.c.d. de E, on peut échanger m et m' dans la proposition qui précède et donc $(m)_g \subset (m')_g$ soit $(m)_g = (m')_g = \sum_{i=1}^{n}(e_i)_g$ C.Q.F.D.!
- E est un ensemble infini alors l'ensemble des sommes finies d'idéaux de A à gauche est un ensemble d'idéaux de A à gauche d'un anneau nœthérien à gauche et admet un élément maximal $\sum_{i=1}^{n}(e_i)_g$. Si m est un p.g.c.d. à gauche de E alors m divise à gauche chaque e_i et donc $\sum_{i=1}^{n}(e_i)_g \subset (m)_g$. Mais comme $\sum_{i=1}^{n}(e_i)_g$ est maximal on a $\sum_{i=1}^{n}(e_i)_g = (m)_g$. Si $(f_1, \ldots, f_p)$ un p-uplet quelconque d'éléments de E alors m, qui est un p.g.c.d.

de E divise à gauche chaque f_j et donc $\sum_{j=1}^{p}(f_j)_g \subset (m)_g$: ceci prouve que pour tout m p.g.c.d. de E à gauche l'ensemble des sommes finies d'idéaux à gauche générés par un élément de E a pour élément maximum $(m)_g = \sum_{i=1}^{n}(e_i)_g$. Tout générateur de cet élément maximum, donc tout p.g.c.d. à gauche de E, est un générateur de $\sum_{e\in E}(e)_g$ qui est l'idéal égal à l' ensemble des sommes finies à générateurs dans E.

(2) **Supposons** $(a)_g \cap (b)_g \neq (0)_g$ **et posons** $(a)_g \cap (b)_g = (m)_g$ **alors** $m \neq 0$**.**

- m **est un p.p.c.m. de** a **et** b **:**
  $m \in (a)_g$ et $m \in (b)_g$ donc pour tout élément e de $\{a, b\}$ $e_{|g}m$.
  Si q est tel que tout élément e de $\{a, b\}$ $e_{|g}q$ alors $q \in (a)_g$ et $q \in (b)_g$ donc $q \in (m)_g = (a)_g \cap (b)_g$ et $m_{|g}q$.
- **Tout générateur de** $(m)_g$ **est un p.p.c.m. de** $\{a, b\}$ **:**
  Soit M un générateur de $(m)_g$ alors puisque $(m)_g = (a)_g \cap (b)_g$: $a_{|g}M$ et $b_{|g}M$.
  Soit $q \in A$ tel que $a_{|g}q$ et $b_{|g}q$ alors $q \in (a)_g \cap (b)_g = (M)_g$ donc $M_{|g}q$.

Supposons $(a)_g \cap (b)_g = (0)_g$ **:**

Nous montrons le

Lemme : Si A est un anneau gradué euclidien à gauche alors $\forall P, Q, R \in A$:

(i) Si $(P)_g \cap (Q)_g = (0)_g$ alors

$$(PR)_g \cap (QR)_g = (0)_g.$$

(ii) Si $(P)_g \cap (Q)_g \neq (0)_g$ alors il existe au moins un p.p.c.m. de $\{P, Q\}$, notons le $P \wedge_g Q$, il existe au moins un p.p.c.m. de $\{PR, QR\}$, notons le $PR \wedge_g QR$, on a de plus :
$(\exists u \in \mathcal{U}_A), (P \wedge_g Q)R = u(PR \wedge_g QR)$.

Preuve :

(i) Si $(P)_g \cap (Q)_g = (0)_g$ alors :
$HP = KQ = 0 \Rightarrow HP = KQ = 0$ et comme $P, Q \in A\backslash\{0\}$ ceci équivaut à :

$$HP = KQ = 0 \Rightarrow H = K = 0$$

Soient à présent $H, K \in A$ tels que $HPR = KQR$ alors $(HP - KQ)R = 0$. Mais $R \neq 0$ et A intègre entraînent alors $HP = KQ$ qui entraîne $H = K = 0$.

(ii) Si $(P)_g \cap (Q)_g \neq (0)_g$ alors :
soit $P \wedge_g Q$ un p.p.c.m. de $\{P, Q\}$, $\exists H, K \in A\backslash\{0\}$ tel que

$P \wedge_g Q = HP = KQ$. On en déduit : $(\forall R \in A\backslash\{0\})$,

$$(P \wedge_g Q)R = HPR = KQR.$$

Il suit $(P \wedge Q)_g R \in (PR)_g \cap (QR)_g$: il existe donc un p.p.c.m. de $\{PR, QR\}$, notons le $PR \wedge_g QR$.

$(\exists u \in A\backslash\{0\})$, $(P \wedge_g Q)R = u(PR \wedge_g QR)$

Mais $PR \wedge_g QR \in (PR)_g \cap (QR)_g$, donc $(\exists H', K' \in A\backslash\{0\})$,

$$PR \wedge_g QR = H'PR = K'QR$$

puis $H'P = K'Q \in (P)_g \cap (Q)_g$. On a alors

$(\exists v \in A\backslash\{0\})$, $H'P = K'Q = v(P \wedge_g Q)$

puis $(\exists v \in A\backslash\{0\})$,

$PR \wedge_g QR = H'PR = K'QR = v(P \wedge_g Q)R$

$\exists u, v \in A\backslash\{0\}$ avec

$$\begin{cases} (P \wedge_g Q)R &= u(PR \wedge_g QR) \\ PR \wedge_g QR &= v(P \wedge_g Q)R \end{cases}$$

donc $\begin{cases} (P \wedge_g Q)R &= uv(P \wedge_g Q)R \\ PR \wedge_g QR &= vu(PR \wedge_g QR) \end{cases}$

soit $\begin{cases} (1-uv)(P \wedge_g Q)R &= 0 \\ (1-vu)(PR \wedge_g QR) &= 0 \end{cases}$. Mais A

est intègre donc $\left\{ \begin{array}{ll} (1-uv) & =0 \\ (1-vu) & =0 \end{array} \right.$ soit $u, v \in \mathcal{U}_A$ C.Q.F.D.!

Nous pouvons à présent montrer par récurrence que

$$(a_1, \ldots, a_n) \in (A \backslash \{0\})^n \Rightarrow \cap_{i=0}^{n} (a_i)_g \neq (0)_g$$

il suffit, pour cela, de montrer que :

$$(a, b) \in (A \backslash \{0\})^2 \Rightarrow (a)_g \cap (b)_g \neq (0)_g$$

Si a ou b sont des unités alors $(a)_g \cap (b)_g$ est $(b)_g \neq (0)_g$ ou $(a)_g \neq (0)_g$ suivant que a ou b est une unité. Si ni a ni b ne sont des unités alors nous supposons que $(a)_g \cap (b)_g = (0)_g$.
Posons $\left\{ \begin{array}{ll} a & = a'(a \vee_g b) \\ b & = b'(a \vee_g b) \end{array} \right.$ où $a \vee_g b$ est un p.g.c.d. de a et b, alors

$$(0)_g = (a)_g \cap (b)_g = \left(a'(a \vee_g b)\right)_g \cap \left(b'(a \vee_g b)\right)_g$$

– **Supposons** $(a')_g \cap (b')_g \neq (0)_g$ **:**
alors il existe un p.p.c.m. de $\{a', b'\}$ et, par le lemme qui précède, un p.p.c.m. de $\{a'(a \vee_g b), b'(a \vee_g b)\}$ que nous notons $a' \wedge_g b'$ et $a \wedge_g b$ et

$$\exists u \in \mathcal{U}_A, \ (a' \wedge_g b')(a \vee_g b) = u(a \wedge_g b)$$

on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} \left((a' \wedge_g b')(a \vee_g b)\right)_g & = & \left((a \wedge_g b)\right)_g \\ & = & (a)_g \cap (b)_g = (0)_g \end{array}$$

ceci entraîne que $(a' \wedge_g b')(a \vee_g b) = 0$ et donc, puisque $a' \wedge_g b' \neq 0$, $a \vee_g b = 0$ qui entraîne $a = b = 0$: ce qui est contradictoire.

– **Supposons** $(a')_g \cap (b')_g = (0)_g$ **:**

$$\begin{aligned}(0)_g &= (a'(a \vee_g b))_g \cap (b'(a \vee_g b))_g \\ &= (a)_g \cap (b)_g\end{aligned}$$

de sorte que

$$(a \vee_g b)_g = (a)_g + (b)_g = (a)_g \oplus (b)_g$$

Soient $f, g \in A$ tels que $a \vee_g b = fa + gb$ alors $(a \vee_g b)_g = (fa)_g + (gb)_g = (a)_g \oplus (b)_g$. De $(a)_g \oplus (b)_g = (fa+gb)_g = (fa)_g + (gb)_g$ il suit que $f, g \in \mathcal{U}_A$.
De

$$\begin{aligned}(a \vee_g b)_g &= (a)_g \oplus (b)_g \\ (a \vee_g b)_g &= (a'(fa + gb))_g + (b'(fa + gb))_g \\ (a \vee_g b)_g &= ((a' + b')fa)_g + ((a' + b')gb)_g\end{aligned}$$

il suit que $(a' + b')f \in \mathcal{U}_A$ ce qui entraîne que $a' + b' \in \mathcal{U}_A$ puis $(a')_g + (b')_g = A$ soit $(\forall x \in A)\exists H, K \in A,\ x = Ha' + Kb'$.
Nous prouvons à présent l'assertion

$$(\exists x \notin (a)_g) \wedge (Fx = Ga') \Rightarrow F = G = 0.$$

Soient $H, K \in A$ tels que $x = Ha' + Kb'$ alors $Fx = Ga'$ entraîne que

$(G - FH)a' = FKb'$ et comme $(a')_g \cap (b')_g = (0)_g$ $FK = G - FH = 0$, A est intègre : $(F = 0) \vee (K = 0)$. Si $K = 0$ alors $x \in (a')_g$. *Si nous choisissons* $x \notin (a')_g$ *alors* $K \neq 0$, donc $F = 0$ et puisque $Ga' = Fx$ et $a' \neq 0$ il suit $G = F = 0$.

Nous concluons : l'assertion

$$(\exists x \notin (a)_g) \wedge (Fx = Ga') \Rightarrow F = G = 0$$

équivaut à l'assertion

$$(\forall x \notin (a')_g)(a')_g \cap (x)_g = (0)_g.$$

$1 \notin (a')_g$ (sinon $a \in \mathcal{U}_A$) donc $(0)_g = (a')_g \cap (1)_g = (a')_g$ ce qui contredit que $a' \neq 0$.

Si $a_1, \ldots, a_n \in A\backslash\{0\}$ alors l'assertion démontrée

$$(a \neq 0) \wedge (b \neq 0) \Rightarrow (a \wedge_g b)_g = (a)_g \cap (b)_g$$

permet une récurrence qui montre que l'ensemble des p.p.c.m. de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est l'ensemble des générateurs de $\bigcap_{i=1}^{n}(a_i)_g$.

Sur les dérivations sur les anneaux commutatifs

Définitions

Soient $(A, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire et $(M, +)$ un groupe commutatif, si de plus M est muni d'une loi externe $\times$ de $A \times M$ dans M vérifiant, pour tous éléments a et b de A et x, y de M :

- $a \times (x + y) = a \times x + a \times y$.
- $(a + b) \times x = a \times x + b \times x$.
- $(a \times b) \times x = a \times (b \times x)$.
- $1 \times x = x$.

alors on dit que M est un A-module à gauche. Nota :*On prendra garde de ce que le $+$ sur A n'est pas le $+$ sur M, il en est de même du $\times$ sur A et du $\times$ sur M. La différence fondamentale entre module et espace vectoriel vient de ce que l'opération externe de multiplication ne peut-être inversée comme c'est le cas d'un espace vectoriel sur un corps. On peut dire qu'un A-module M est un espace vectoriel sur lequel on a* ***oublié*** *la possibilité d'inversion, c'est pourquoi les modules sont importants en théorie algébrique des nombres.*

Une dérivation D d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ à valeurs dans un A-module $(M, +, \times)$ à gauche est une application non nulle, et différente de l'identité, additive de A dans M qui satisfait l'identité de Leibnitz :

$$\boxed{(\forall (a, b) \in A)\ D(a \times b) = a \times D(b) + D(a) \times b}$$

Définition : Si D est une dérivation sur un anneau de caractéristique c alors l'ensemble $\{x \in A / D(x) = 0\}$ est un anneau dont la caractéristique est celle de A. On l'appelle l'anneau des constantes et on pourra le noter A_D.

Preuve : A_D est le noyau d'une application additive, c'est un groupe additif, c'est aussi le noyau d'un demi-groupe multiplicatif par l'identité de Leibnitz A et A_D ont même caractéristique puisque $1 \in A_D$.

Quelques exemples

Un exemple linéaire

.

Si K est un corps de caractéristique 0, $K[X]$ son anneau des polynômes, D est la dérivation des polynômes, D^i la dérivation i-ème, avec $D^0 = Id$ alors l'anneau des polynômes $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ est gradué si on choisit $\nu\left(\sum_{i=0}^{n} a_i D^i\right)$ comme le grand entier i tel que $a_i \neq 0$ et $\nu(0) = 0$. On note cet anneau $K[X][D]$, son corps des constantes est K. Si $P, Q \in K[X][D]$ alors $P \times Q \overset{déf}{=} P \circ Q$. $K[X][D]$ est euclidien par la formule du binôme

$$a_i D^i \times b_j D^j = \sum_{k=0}^{i} C_i^k a_i D^k(b_j) D^{i-k+j}$$

La structure de $K[X][D]$ peut s'enrichir d'une opération externe $K[X] \times K[X][D] \dot{\to} K[X][D]$ par

$$a.P(D) \overset{déf}{=} aD^0 \times P(D)$$

L'algèbre $(K[X][D], +, \times, .)$ est doublement non-commutative.

Propriété :

(i) La famille $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille-base des espaces vectoriel $K[X][D]$.

(ii) L'anneau $K[X][D]$ est gradué euclidien à gauche et à droite.

(iii) $\mathcal{U}_{K[X][D]}$ est l'ensemble des opérateurs de degré 0 à coefficient sur K, il est isomorphe à $K\backslash\{0\}$.

Preuve :

(i) Nous montrons le

Lemme : $L = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ avec $a_n \neq 0$ est K-linéaire, son noyau est un K-espace vectoriel de dimension au plus égale à n.

Preuve : Si $n = 0$ alors $L(s) = a_0 s$. L'équation $L(s) = 0$ a pour ensemble de solutions $\{0\}$ espace vectoriel de dimension 0. Si $L = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$, avec $a_n \neq 0$ et $n > 0$, soit l'équation $L(s) = 0$ n'a pas de solution non nulle, auquel cas son ensemble de solutions est $\{0\}$ espace vectoriel de dimension 0, soit l'équation $L(s) = 0$ possède une solution non nulle s_0 : nous effectuons alors le changement d'inconnue $s = s_0 u$. Par la formule du binôme

$$D^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i D^i(x) D^{n-i}(y)$$

on voit que $L(s_0 u) = H(u)$, $H = \sum_{i=0}^{n} b_i D^i$ avec $b_n = a_n$, $b_0 = L(s_0) = 0$, de sorte que $H(u) = J(D(u))$ où $J = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} D^i$.
L'équation $H(u) = 0$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} J(v) = 0 \\ D(u) = v \end{cases}$$

Nous appliquons l'hypothèse de récurrence pour J : le K-espace vectoriel V des solutions de $J(v) = 0$ est de dimension au plus $n-1$, si E est l'espace vectoriel $D^{-1}(V)$, p la projection canonique $E \to E/ker(D) = E/K$, il existe un isomorphisme

$$i : E/K \to D(E) = D(D^{-1}(V)) \subset V$$

tel que $i \circ p = D$.
E/K est isomorphe à $D(E)$ espace vectoriel de dimension finie au plus $n-1$, comme K est un espace vectoriel sur lui-même de dimension 1, E est donc un espace vectoriel de dimension finie au plus égale à n sur K.
L'espace vectoriel des solutions de $H(u) = 0$ est de dimension au plus n, et comme toute solution de $L(s) = 0$ s'exprime par $s = s_0 u$ avec $s_0 \neq 0$ et u solution de $H(u) = 0$, l'espace vectoriel des solutions de $L(s) = 0$ est de dimension au plus égale à n.
La famille $(D)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie libre de $K[X][D]$: supposons qu'une combinaison linéaire finie de cette famille est nulle alors un opérateur $L = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0) \in K[X]^n$ est nul ce qui revient à dire que $K[X]$ est inclus dans l'espace vectoriel des solutions de $L(u) = 0$; or un tel opérateur a au plus n solutions K-

linéairement indépendantes et le K-espace vectoriel $K[X]$ est de dimension infinie : il y a contradiction et la famille $(D)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie libre de $K[X][D]$. Cette famille est, par définition, génératrice de $K[X][D]$: c'en est donc une base.

(ii) Soit $L = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ avec $a_n \neq 0$, on pose $deg(L) = n$, la fonction deg est un stathme euclidien. Nous considérons la formule du binôme

$$a_i D^i \times b_j D^j = \sum_{k=0}^{i} C_i^k a_i D^k(b_j) D^{i-k+j}$$

et nous en servons pour construire les divisions euclidiennes. Posant $b = \sum_{i=0}^{deg(b)} b_i D^i$ nous considérons les trois suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\begin{cases} \varepsilon_0 &= 0 \\ q_0 &= 0 \\ r_0 &= a \end{cases}$ et

$\begin{cases} \varepsilon_n &= Max(0, deg(r_{n-1}) - deg(b)) \\ q_n &= q_{n-1} + \varepsilon_n \frac{r_{n-1}*}{b_{deg(b)}} D^{\varepsilon_n} b \\ r_n &= r_{n-1} - q_n b \end{cases}$ où $r_{n-1}*$ est le coefficient dominant de r_{n-1}. Pour la division euclidienne à droite nous considérons les trois suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$\begin{cases} \varepsilon_0 &= 0 \\ q_0 &= 0 \\ r_0 &= a \end{cases}$ et

$$\begin{cases} \varepsilon_n &= Max(0, deg(r_{n-1}) - deg(b)) \\ q_n &= q_{n-1} + b\varepsilon_n \frac{r_{n-1}*}{b_{deg(b)}} D^{\varepsilon_n} \\ r_n &= r_{n-1} - bq_n \end{cases}$$ où $r_{n-1}*$ est le coefficient dominant de r_{n-1}. Ces suites sont stationnaires à partir de l'indice $i^* = Max(0, deg(a) - deg(b))$ où r_{i^*}, q_{i^*} sont le reste et le quotient de la division à gauche (Resp. à droite) de a par b. Ceci prouve que $K[X][D]$ est euclidien gradué à gauche (Resp. à droite).

(iii) Soit $a \in K[X][D]$ inversible alors $\exists b \in K[X][D]$, $ab = ba = 1$ ceci entraîne que $deg(a) + deg(b) = 0$ soit $a, b \in K[X]$ et comme a est inversible dans $K[X]$ c'est que $a \in K\backslash\{0\}$. Réciproquement si $a \in K\backslash\{0\}$ alors a est inversible d'inverse a^{-1}.

On pourra alors écrire **le** p.g.c.d. et **le** p.p.c.m. à gauche (Resp. à droite) en choisissant 1 pour coefficient dominant du coefficient dominant du terme de plus haut degré d'un opérateur de $K[X][D]$.

Les p.g.c.d. se calculent alors par l'algorithme des divisions euclidiennes comme le pratiquent les algébristes avec les entiers.

Sur les connexions modulaires et vectorielles

De quoi s'agit-il?

Définition Si D est une dérivation sur un anneau commutatif unitaire $(A, +, \times)$ à valeurs dans un A-module $(M, +, \times, .)$ alors une connexion ∇ de dérivation D est une application de M vers M telle que :

- $\forall x, y \in M,\ \nabla(x + y) = \nabla(x) + \nabla(y)$ (additivité)
- $\forall (x, a) \in M \times A$,

$$\nabla(ax) = a.\nabla(x) + D(a).x$$

(identité de Leibnitz)

Nota : Cette notion n'est pas à proprement parler géométrique, toute géométrie ne pouvant se fonder sans algèbre, elle permettra une qualification locale des singularités d' équations différentielles.

Un exemple linéaire

Si $E = K[X][D]$ alors l'application $\nabla : \begin{cases} K[X][D] & \to & K[X][D] \\ P & \mapsto & D \times P \end{cases}$ est une connexion modulaire telle que pour tout idéal à gauche I $D(i) \subset (i)_g \Rightarrow \nabla(I) \subset I$.
Preuve : si $I = (i)_g$ alors $\forall x \in K[X][D]$ $D(xi) = x \times D(i) + D(x) \times i \subset (i)_g$.
L'identité de Leibnitz permet aussi de démontrer que pour toute connexion modulaire ∇ et tout idéal à gauche I de générateur i :

$$D(i) \subset (i)_g \Rightarrow \nabla(I) \subset I$$

Un cas particulier d'anneau sous-jacent et de connexion

Un corps est un cas particulier d'anneau et dans l'exemple qui suit A sera un anneau de caractéristique 0 muni d'une dérivation sur lui-même et de dimension infinie sur ces constantes, des exemples de tels anneaux A sont donnés par $A = K(X)$ ou $A = K((X))$ muni de la dérivation $\frac{d}{dX}$. On ne considérera les connexions, dites **connexions vectorielles**, ∇ de dérivation D que comme application d'un espace vectoriel V de dimension n sur A vers lui-même.

Matrice d'une connexion vectorielle et formule de changement de base

Matrice d'une connexion vectorielle Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base du A-espace vectoriel V et ∇ une connexion vectorielle de dérivation D alors

$$\begin{aligned}\nabla\left(\sum_{j=1}^n x_j.e_j\right) &= \sum_{j=1}^n (x_j.\nabla(e_j) + D(x_j).e_i) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j.\nabla(e_j) + \left(\sum_{j=1}^n D(x_j).e_j\right) \\ &= L\left(\sum_{j=1}^n x_j.e_j\right) + (\sum_{i=1}^n D(x_i).e_i)\end{aligned}$$

où L est la matrice $(\nabla(e_j)_i)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq i\leq n} \stackrel{déf}{=} (\nabla)_{\mathcal{B}}$ dont les éléments $L_{i,j}$ de ligne d'indice i et de colonne d'indice j sont $\nabla(e_j)_i$.

Formule de changement de base Soit $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une autre base du A-espace vectoriel V alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n x_j.e_j &= \sum_{j=1}^n y_j.f_j \\ \nabla\left(\sum_{j=1}^n x_j.e_j\right) &= \nabla\left(\sum_{j=1}^n y_j.f_j\right)\end{aligned}$$

Les vecteurs $L\left(\sum_{j=1}^n x_j.e_j\right) + \sum_{i=1}^n D(x_i).e_i$ et $M\left(\sum_{j=1}^n y_j.f_j\right) + \sum_{i=1}^n D(y_i).f_i$ sont égaux et nous avons la relation $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
Soit $1 \leq j \leq n$ alors le vecteur f_j a, pour coordonnées dans le base $\mathcal{B}'$, le vecteur F_j de coefficient nul sur toutes les lignes sauf la i-ème où il

vaut 1. La formule de changement de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ indique que f_j a, pour coordonnées dans le base $\mathcal{B}$, le j-ème vecteur-colonne $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(.,j)$ de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, le vecteur $M.f_j$ est alors le vecteur $L.P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(.,j) + D\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(.,j)\right)$. Ceci étant vrai pour tout j : la matrice des coordonnées, dans la base $\mathcal{B}$, de la suite de vecteurs $(M.f_1, \ldots, M.f_n)$ est la matrice $LP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} + D\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)$. La formule de changement de coordonnées de base fait alors que la matrice des coordonnées, dans la base $\mathcal{B}'$, de la suite de vecteurs $(M.f_1, \ldots, M.f_n)$, est la matrice $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}LP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} + P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}D\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)$. On obtient alors la formule de changement de base :

$$(\nabla)_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\nabla)_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} + P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}D\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)$$

vecteurs cycliques d'une connexion vectorielle

Définitions

Soit E un espace vectoriel muni d'une connexion vectorielle ∇, $y \in E$ sera dit cyclique pour ∇ si l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}(\nabla, y) = \left(\nabla^i(y)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est de dimension finie. On appellera cette dimension l'ordre du vecteur cyclique et $V(\nabla, y)$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}(\nabla, y)$. Pour un espace vectoriel V on dira que V est cyclique pour ∇ s'il

existe $y \in V$ tel que $V = V(\nabla, y)$. Pour tout espace vectoriel cyclique pour ∇, $\nabla(V) \subset V$: c'est à dire que tout espace vectoriel V cyclique pour ∇ est stable pour ∇.

Quelques propriétés des vecteurs cycliques

Lemme : Pour toute connexion vectorielle ∇ de dérivation D, l'ordre $o(\nabla, y)$ d'un vecteur y cyclique pour ∇ est égal à la dimension de $V(\nabla, y)$ et dans la base $\mathcal{B} = \left(y, \ \ldots, \nabla^{o(\nabla,y)-1}\right)$ la matrice $(\nabla)_{\mathcal{B}}$ est compagnon.

Preuve : $\mathcal{B}$ est une famille libre de $V(\nabla, y)$ par définition de l'ordre de y et $\left(y, \ \ldots, \nabla^{o(\nabla,y)}\right)$ n'en est pas une : il existe $(c_0, \ \ldots, \ c_{o(\nabla,y)})$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{o(\nabla,y)} c_k \nabla^k(y) = 0$. $c_{o(\nabla,y)}$ n'est pas nul (s'il l'était l'ordre de y serait strictement plus petit que $o(\nabla, y)$), il suit que $\nabla^{o(V(\nabla,y))} = -\sum_{k=0}^{o(\nabla,y)-1} \frac{c_k}{c_{o(\nabla,y)}} \nabla^k$ et

$$(\nabla)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & -\frac{c_0}{c_{o(\nabla,y)}} \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & -\frac{c_{o(\nabla,y)-1}}{c_{o(\nabla,y)}} \end{pmatrix}.$$

Pour finir on prouve, par récurrence sur k, que la famille $\mathcal{B}_k = \left(y, \ \ldots, \ \nabla^{o(\nabla)+k}\right)$ n'est pas libre : ceci est prouvé pour $k = 0$ et une relation de dépendance $\sum_{j=0}^{o(\nabla)+k} \lambda_{j,k} \nabla^j(y) = 0$ entraîne

l'égalité $\sum_{j=0}^{o(\nabla)+k} \nabla\left(\lambda_{j,k}\nabla^j(y)\right) = 0$ qui est la relation de dépendance

$$\sum_{j=0}^{o(\nabla)+k} D(\lambda_{j,k})\nabla^j(y) + \sum_{j=0}^{o(\nabla)+k} \lambda_{j,k}\nabla^{j+1}(y) = 0$$

s'appliquant à $\mathcal{B}_{k+1}$.

Lemme Soient E un K-espace vectoriel, une connexion ∇ de dérivation D sur K, y_0 un vecteur cyclique d'ordre k, si $0 \leq i \leq k-1$ alors $y_i = \nabla^i(y_0)$, nous appelons f_{∇,y_0} l'application linéaire de $V(\nabla, y_0)$ vers $K[D]$ telle que $f_{\nabla,y_0}(y_i) = D^i$, $D\times$ la connexion : $\begin{array}{ccc} K[D] & \to & K[D] \\ P & \mapsto & DP \end{array}$ L_{∇,y_0} l'opérateur $D^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i D^i$ si $f_{\nabla,y_0}(y_k) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i y_1$, p_{∇,y_0} la projection canonique de $K[D]$ sur $K[D]/(L_{\nabla,y_0})_g$ où $(L_{\nabla,y_0})_g$ est l'idéal à gauche engendré par L_{∇,y_0} alors il existe une unique connexion $D\times_{\nabla,y_0}$ de $K[D]/(L_{\nabla,y_0})_g$ qui rende le shéma suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V(\nabla,y_0) & \xrightarrow{\nabla} & V(\nabla,y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle f_{\nabla,y_0}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\nabla,y_0}} \\ K[D] & \xrightarrow{D\times} & K[D] \\ \downarrow{\scriptstyle p_{\nabla,y_0}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{\nabla,y_0}} \\ K[D]/(L_{\nabla,y_0})_g & \xrightarrow{D\times_{\nabla,y_0}} & K[D]/(L_{\nabla,y_0})_g \end{array}$$

Preuve : Si $P - P' \in (L_{\nabla,y_0})_g$ alors $\begin{cases} P &= QL_{\nabla,y_0} + R \\ P' &= Q'L_{\nabla,y_0} + R \end{cases}$

puis $\begin{cases} DP &= DQL_{\nabla,y_0} + DR \\ DP' &= DQ'L_{\nabla,y_0} + DR \end{cases}$ donc $DP - DP' = (DQ - DQ')L_{\nabla,y_0} \in (L_{\nabla,y_0})_g$, tous les représentants de la classe de P appartiennent à la classe de DP. Ceci induit sur $K[D]/(L_{\nabla,y_0})_g$ une application unique $D\times_{\nabla,y_0}$: celle qui à la classe de $P \in K[D]$ associe la classe de DP. Comme la classe de la somme $P+Q$ est la somme des classes de P et Q et comme $D_\times$ est additive, $D\times_{\nabla,y_0}$ est additive. Si $\begin{cases} P &= QL_{\nabla,y_0} + R \\ P' &= Q'L_{\nabla,y_0} + R \end{cases}$ et $a \in K$ alors $\begin{cases} DaP &= DaQL_{\nabla,y_0} + aDR + D(a)R \\ DaP' &= DaQ'L_{\nabla,y_0} + aDR + D(a)R \end{cases}$

soit $\begin{cases} DaP &= DaQL_{\nabla,y_0} + (aD + D(a))R \\ DaP' &= DaQ'L_{\nabla,y_0} + (aD + D(a))R \end{cases}$

prouve que $D\times_{\nabla,y_0}$ vérifie bien l'identité de Leibnitz.

De plus il découle aisément de la définition de $D\times_{\nabla,y_0}$ que $D\times_{\nabla,y_0}$ et p_{∇,y_0} commutent : ce qui rend le deuxième shéma commutatif.

Explicitons à présent $D \times_{\nabla,y_0} \circ p_{\nabla,y_0}$: soient $P \in K[D]$ et R le reste de la division euclidienne de P par L_{∇,y_0}, son degré est alors au plus $o(\nabla, y_0) - 1$, alors $R = \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} r_i D^i$ et DP

est dans la classe de

$$DR = \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} D(r_i)D^i + \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} r_i D^{i+1}$$

Soit à présent $v = \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} r_i y_i \in V(\nabla, y_0)$ alors $f_{\nabla,y_0} = \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} r_i D^i$ et $D \times_{\nabla,y_0} \circ p_{\nabla,y_0} \circ f_{\nabla,y_0}(v)$, est la classe de

$$\sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} D(r_i)D^i + \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} r_i D^{i+1} = D(R)$$

On a aussi

$$\nabla(v) = \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} D(r_i)y_i + \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} r_i \nabla(y_i)$$

et sachant que

$$\begin{cases} \nabla(y_i) & = y_{i+1} \; si \; i < o(\nabla, y_0) - 1 \\ \nabla(y_{o(\nabla,y_0)-1}) & = \nabla^{o(\nabla,y_0)}(y_0) = \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} c_i y_i \end{cases}$$

on obtient

$$\nabla(v) = \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} D(r_i)y_i + \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-2} r_i y_{i+1} + r_{o(\nabla,y_0)-1} \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} c_i y_i$$

puis que $p_{\nabla,y_0} \circ f_{\nabla,y_0} \circ \nabla(v)$ est la classe de

$$\sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} D(r_i)D^i + \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} r_i D^{i+1} + r_{o(\nabla,y_0)-1} \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} c_i D^i$$

Ceci rend le premier shéma commutatif.

Soit à présent $\phi_{\nabla,y_0} = p_{\nabla,y_0} \circ f_{\nabla,y_0}$ alors ϕ_{∇,y_0}

est K-linéaire comme composée d'applications K-linéaires et, transforme la base $(y_0, \ldots, \nabla^{o(\nabla,y_0)-1})$ en la base : la famille des classes de $(1, D, \ldots, D^{o(\nabla,y_0)-1})$ c'est donc un isomorphisme. On a la

Propriété : Si D est une dérivation du corps K, E un K-espace vectoriel, ∇ une connexion vectorielle sur E, de dérivation D, y_0 un vecteur cyclique d'ordre $o(\nabla, y_0)$ pour ∇, $L_{\nabla,y_0} = D^{o(\nabla)} - \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} c_i D^i$ si $\nabla^{o(\nabla)}(y_0) = \sum_{i=0}^{o(\nabla,y_0)-1} c_i \nabla^i(y_0)$; alors il existe un isomorphisme $\phi_{\nabla,y_0} : V(\nabla, y_0) \to K[D]/(L_{\nabla,y_0})_g$ et une connexion $D\times_{\nabla,y_0}$ qui rendent le shéma suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V(\nabla, y_0) & \xrightarrow{\nabla} & V(\nabla, y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{\nabla,y_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{\nabla,y_0}} \\ K[D]/(L_{\nabla,y_0})_g & \xrightarrow{D\times_{\nabla,y_0}} & K[D]/(L_{\nabla,y_0})_g \end{array}$$

Polynômes de connexions vectorielles

Définitions et propriétés

Définitions

Soient E un K-espace vectoriel sur un corps K, D une dérivation sur K, f une application de E dans E et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \in K[D]$ on pose $P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i$ avec, $f_0 = Id_E$ et si $i > 0$

alors $f^i = f \circ f^{i-1}$: on peut alors définir une application θ_E : $\begin{cases} K[D] \times E^E & \to & E^E \\ (P, f) & \mapsto & P(f) \end{cases}$ qui est K-linéaire par rapport à la variable P et telle que pour un f donné l'ensemble $\theta_E(K[D], f)$ peut-être muni d'une structure d'algèbre (en général non-commutative) en posant $P(f)Q(f) = PQ(f)$, on l'appelle l'algèbre des polynômes de f.

Exemple : Si $f = \nabla$ une connexion sur le K-espace vectoriel E de dérivation D sur K alors $\theta_E(K[D], \nabla)$ définit l'algèbre des polynômes de ∇.

Propriétés :

Si y est cyclique d'ordre k pour ∇, connexion vectorielle sur E espace vectoriel de corps K de dérivation D alors, si $p_{\nabla,y}$ est la projection de $K[D]$ sur $K[D]/(L_{\nabla,y})_g$, $\phi_{\nabla,y}$ l'isomorphisme de $V(\nabla, y)$ vers $K[D]/(L_{\nabla,y})_g$, alors pour tout

polynôme, le shéma qui suit est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V(\nabla,y) & \xrightarrow{P(\nabla)} & V(\nabla,y) \\ \downarrow \phi_{\nabla,y} & & \downarrow \phi(\nabla,y) \\ K[D]/(L_{\nabla,y})_g & \xrightarrow{P(D\times_{\nabla,y})} & K[D]/(L_{\nabla,y})_g \\ \uparrow p_{\nabla,y} & & \uparrow p_{\nabla,y} \\ K[D] & \xrightarrow{P(D\times)} & K[D] \end{array}$$

Preuve : la commutativité du shéma

$$\begin{array}{ccc} V(\nabla,y) & \xrightarrow{\nabla} & V(\nabla,y) \\ \downarrow \phi_{\nabla,y} & & \downarrow \phi_{\nabla,y} \\ K[D]/(L_{\nabla,y})_g & \xrightarrow{D\times_{\nabla,y}} & K[D]/(L_{\nabla,y})_g \end{array}$$

donne $\nabla = \phi^{-1}_{\nabla,y} \circ D \times_{\nabla,y} \circ \phi_{\nabla,y}$ qui, par compositions itérées et combinaison linéaire, devient

$$\forall P \in K[X],\ P(\nabla) = \phi^{-1}_{\nabla,y} \circ P(D\times_{\nabla,y}) \circ \phi_{\nabla,y}$$

rend commutatif le shéma :

$$\begin{array}{ccc} V(\nabla,y) & \xrightarrow{P(\nabla)} & V(\nabla,y) \\ \downarrow \phi_{\nabla,y} & & \downarrow \phi_{\nabla,y} \\ K[D]/(L_{\nabla,y})_g & \xrightarrow{P(D\times_{\nabla,y})} & K[D]/(L_{\nabla,y})_g \end{array}$$

La commutativité du shéma

$$\begin{array}{ccc} K[D] & \xrightarrow{D\times} & K[D] \\ \Big\downarrow p_{\nabla,y_0} & & \Big\downarrow p_{\nabla,y_0} \\ K[D]/(L_{\nabla,y})_g & \xrightarrow{D\times_{\nabla,y}} & K[D]/(L_{\nabla,y})_g \end{array}$$

donne $p_{\nabla,y} \circ D_\times = D \times_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y}$ qui, après composition avec le projecteur $p_{\nabla,y}$ devient

$$D_\times = p_{\nabla,y} \circ D \times_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y}$$

qui, par compositions itérées et combinaison linéaire, devient

$$\forall P \in K[X],\ P\left(D_\times\right) = p_{\nabla,y} \circ P\left(D\times_{\nabla,y}\right) \circ p_{\nabla,y}$$

qui, après composition avec le projecteur $p_{\nabla,y}$ devient

$$\forall P \in K[X],\ p_{\nabla,y} \circ P\left(D_\times\right) = P\left(D\times_{\nabla,y}\right) \circ p_{\nabla,y}$$

rend commutatif le shéma :

$$\begin{array}{ccc} K[D]/(L_{\nabla,y})_g & \xrightarrow{P(D\times_{\nabla,y})} & K[D]/(L_{\nabla,y})_g \\ \Big\uparrow p_{\nabla,y} & & \Big\uparrow p_{\nabla,y} \\ K[D] & \xrightarrow{P(D\times)} & K[D] \end{array}$$

Polynômes de connexion vectorielle annulateurs d'un vecteur, idéaux annulateurs d'un vecteur

Dans ce qui suit nous adopterons le vocabulaire suivant : K est un corps de caractéristique c, D

une dérivation sur le corps K, E est un K-espace vectoriel, ∇ une connection de E dans E associée à la dérivation D, y est cyclique d'ordre k pour ∇ si et seulement si le K-espace vectoriel engendré par $\left(\nabla^i(y)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est de dimension k, la famille finie $\left(y,\ \ldots,\ \nabla^{k-1}(y)\right)$ en engendre l'espace vectoriel stable $V(\nabla, y)$ tout en en étant une base. Si $\nabla^k(y) = \sum_{i=0}^{k-1} \nabla^i(y)$ alors on pose $L_{\nabla,y} = D^k - \sum_{i=0}^{k-1} D^k$, la dérivation D définie sur $K[D]$ passe au quotient à gauche sur $K[D]/(L_{\nabla,y})_g$ en $\dot{D}$ avec $\dot{D}(P + (L_{\nabla,y})_g) = D\left((P(mod)_g L_{\nabla,y}\right)$ où $P(mod)_g L_{\nabla,y}$ est le reste de la division euclidienne à gauche de P par $L_{\nabla,y}$, $f_{\nabla,y}$ est l'application linéaire injective de $V(\nabla, y)$ vers $K[D]$ telle que $0 \leq i \leq k-1 \Rightarrow f_{\nabla,y}\left(\nabla^i(y)\right) = D^i$, $p_{\nabla,y}$ est la projection linéaire du K-espace vectoriel $K[D]$ sur le K-espace vectoriel $K[D]/(L_{\nabla,y})_g$, $\phi_{\nabla,y}$ est l'isomorphisme K-linéaire de $V(\nabla, y)$ vers $K[D]/(L_{\nabla,y})_g$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq k-1,\ \phi_{\nabla,y}\left(\nabla^i(y)\right) = \dot{D}^i$$

Polynômes de connexion annulateurs d'un vecteur

Lemme : Soit $y \in E$, cyclique d'ordre k pour ∇ alors

$$\forall x \in V(\nabla, y),\ \forall P \in K[D]$$
$$P(\nabla)(x) = \phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}\left(P f_{\nabla,y}(x)\right)$$

Preuve : Comme $\phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}$ est une application K-linéaire, il suffit de montrer que :

$$\forall x \in V(\nabla, y),\ \forall i \in \mathbb{N},\ \phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}\left(D^i f_{\nabla,y}(x)\right)$$

Ce que nous faisons par récurrence sur i : y est cyclique d'ordre k alors on peut écrire $x = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \nabla^j(y)$ puis :

$$\begin{aligned}
f_{\nabla,y}(x) &= \sum_{j=0}^{k-1} c_j D^j \\
p_{\nabla,y}\left(f_{\nabla,y}(x)\right) &= \sum_{j=0}^{k-1} c_j \dot{D}^j \\
\phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}\left(f_{\nabla,y}(x)\right) &= \sum_{j=0}^{k-1} c_j \phi_{\nabla,y}^{-1}\left(\dot{D}^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} c_j \nabla^j(y) = x
\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme pour $i = 0$.
Supposons à présent que $\phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}\left(D^i f_{\nabla,y}(x)\right)$

alors :

$$\begin{aligned}
\nabla^{i+1}(x) &= \phi^{-1}_{\nabla,y} \circ D \times_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y} \left(D^i f_{\nabla,y}(x) \right) \\
car\ \nabla &= \phi^{-1}_{\nabla,y} \circ D \times_{\nabla,y} \circ \phi_{\nabla,y} \\
&= \phi^{-1}_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y} \circ D \times \left(D^i f_{\nabla,y}(x) \right) \\
car\ D \times_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y} &= p_{\nabla,y} \circ D \times \\
&= \phi^{-1}_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y} \left(D D^i f_{\nabla,y}(x) \right) \\
&= \phi^{-1}_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y} \left(D^{i+1} f_{\nabla,y}(x) \right)
\end{aligned}$$

Définition : Soit $z \in E$, on dit que $P \in K[D]$ est annulateur de z relativement à la connexion ∇ si et seulement si $P(\nabla)(z) = 0$. Pour $z \in E$ l'ensemble des polynômes annulateurs de z relativement à ∇ est un idéal à gauche de $K[D]$.
On vérifie facilement, si P et P' sont des polynômes annulateurs de z, qu'alors $P + P'$, $-P$, QP avec $Q \in K[D]$ sont encore des polynômes annulateurs de z : l'ensemble des polynômes annulateurs de z relativement à la connexion ∇ est donc un idéal à gauche de $K[D]$. D'autre part, du lemme précédent, on déduit la
Propriété : Si $z \in V(\nabla, y)$ alors $P \in K[D]$ est un polynôme annulateur de z relativement à ∇ si et seulement si $L_{\nabla,y}$ divise $P f_{\nabla,y}(z)$, en particulier si $z = y$ l'ensemble des polynômes annulateurs de y relativement à ∇ est l'idéal à gauche $(L_{\nabla,y})_g$. $L_{\nabla,y}$ est donc le polynôme annulateur de y relativement à ∇ de degré minimum.

Lemme du transporteur Soit A un anneau euclidien gradué à gauche, soient $f,\ L \in A\backslash\{0\}$ l'ensemble des $P \in A$ tels que $Pf \in (L)_g$ est un idéal dont on note $L : f$ un générateur, on a alors les égalités

$$\begin{cases} (L : f)_g f &= (L)_g \cap (f)_g \\ (f : L)_g L &= (L)_g \cap (f)_g \end{cases}$$

Dans le cas où f et L sont premiers entre eux à gauche l'idéal $(L : f)_g$ n'est pas nécessairement $(L)_g$ contrairement au cas d'un anneau commutatif euclidien gradué.

Preuve : $I = \{P \in A / Pf \in (L)_g\}$ est un idéal à gauche dont nous appelons $L : f$ un générateur. Un élément de I est un Pf tel qu'il existe $Q \in A$, tel que $Pf = QL : Pf$ est un multiple commun de f et L on a donc $If \subset (L)_g \cap (f)_g$. Un élément de $(L)_g \cap (f)_g$ est un Pf tel que $P \in A$ et $Pf \in (L)_g$: c'est Pf où $P \in I$, ce qui donne $(L)_g \cap (f)_g \subset If$. On a donc $If = (L)g \cap (f)_g$ ce qui entraîne $(L : f)_g f = (L)_g \cap (f)_g$ puis, en permutant L et f, $(L : f)_g L = (L)_g \cap (f)_g$.

Lemme du vecteur cyclique : Soit $y \in E$ cyclique d'ordre k pour ∇ et soit $z \in V(\nabla, y)$ alors

- L'idéal annulateur de y relativement à ∇ est l'idéal $(L_{\nabla,y})_g$.

- L'idéal annulateur de z relativement à ∇ est l'idéal $(L_{\nabla,y} : f_{\nabla,y}(z))_g$. Comme c'est aussi l'idéal $(L_{\nabla,z})_g$ on a alors

$$(L_{\nabla,z})_g = (L_{\nabla,y} : f_{\nabla,y}(z))_g$$

Preuve : Soit $z \in V(\nabla, y)$ alors $\forall P \in K[D]$ alors $\forall P \in K[D],\ P(\nabla)(z) = \phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}\,(P f_{\nabla,y})$ Comme $\phi_{\nabla,y}$ est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} P(\nabla)(z) = 0 &\iff p_{\nabla,y}\,(P f_{\nabla,y}) = 0 \\ &\iff P f_{\nabla,y} \in (L_{\nabla,y})_g \\ &\iff P \in (L_{\nabla,y} : f_{\nabla,y}(z))_g \end{aligned}$$

Si $z \in V(\nabla, y)$ alors $(L_{\nabla,y} : f_{\nabla,y}(z))_g$ est l'idéal annulateur de z relativement à ∇, comme cet idéal est aussi $(L_{\nabla,z})_g$ on a donc

$$(L_{\nabla,z})_g = (L_{\nabla,y} : f_{\nabla,y}(z))_g$$

Etude d'une connexion sur un sous-espace cyclique $V(\nabla, y)$

Dans cette partie y est cyclique d'ordre k pour la connexion ∇ et $z \in V(\nabla, y)$.

Si $f_{\nabla,y}(z) \vee_g L_{\nabla,y} = 1$

Alors $\exists P, Q \in K[D],\ P f_{\nabla,y}(z) + Q L_{\nabla,y} = 1$ et appliquant $\phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}$ à cette égalité on obtient

$P(\nabla)(z) = y$ dont on déduit que

$$\boxed{V(\nabla, z) = V(\nabla, y)}$$

Preuve : ∇ est stable sur $V(\nabla, y)$ donc

$$\begin{aligned} z \in V(\nabla, y) &\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N},\ \nabla^i(z) \in V(\nabla, y) \\ &\Rightarrow V(\nabla, z) \subset V(\nabla, y) \end{aligned}$$

∇ étant stable sur $V(\nabla, z)$ on a

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \nabla^i(z) \in V(\nabla, z)$$

puis par combinaison linéaire à coefficients sur K, on a $\forall Q \in K[D],\ Q(\nabla)(z) \in V(\nabla, z)$. En particulier pour Q variant dans la famille $\left(D^i P\right)_{i \in \mathbb{N}}$ on obtient $\forall i \in \mathbb{N},\ \nabla^i\left(P(\nabla)(z)\right) \in V(\nabla, z)$ soit $\forall i \in \mathbb{N},\ \nabla^i(y) \in V(\nabla, z)$ qui entraîne que $V(\nabla, y) \subset V(\nabla, z)$.
Nous savons que $P(\nabla)(z) = \phi_{\nabla,z}^{-1} \circ p_{\nabla,z}\left(P f_{\nabla,z}(z)\right)$ si on remarque que $f_{\nabla,z}(z) = 1$ et si on effectue la division euclidienne de P par $L_{\nabla,z}$, soit $P = RL_{\nabla,z} + P'$ avec $deg(P') < deg\left(L_{\nabla,z}\right) = k$, on obtient alors

$$\begin{aligned} y = P(\nabla)(z) &= \phi_{\nabla,z}^{-1}\left(p_{\nabla,z}(RL_{\nabla,z}) + p_{\nabla,z}(P')\right) \\ &= \phi_{\nabla,z}^{-1}\left(_{\nabla,z}(P')\right) \\ &= \phi_{\nabla,z}^{-1} \circ p_{\nabla,z}\left(P' f_{\nabla,z}(z)\right) = P'(\nabla)(z) \end{aligned}$$

Mais $P'(\nabla)(z) = y$ s'écrit aussi

$$\phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}\left(P' f_{\nabla,y}\right) = \phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}(1)$$

soit $\phi_{\nabla,y}^{-1} \circ p_{\nabla,y}\,(P' f_{\nabla,y}(z) - 1) = 0$
soit $p_{\nabla,y}\,(P' f_{\nabla,y}(z) - 1) = 0$
soit $P' f_{\nabla,y}(z) - 1 = -Q' L_{\nabla,y}$
soit $P' f_{\nabla,y}(z) + Q' L_{\nabla,y} = 1$.
Comme $deg\,(f_{\nabla,y}(z)) = deg\,(L_{\nabla,y}) = k > 0$ et $deg(P') < k$, cette égalité entraîne

$$\exists P', Q' \in K[D],$$

$$(deg(P') < deg\,(L_{\nabla,y})) \vee (deg(Q') < deg\,(f_{\nabla,y})) \vee (P' f_{\nabla,y}(z) + Q' L_{\nabla,y} = 1)$$

Ce lemme se généralise à tout $L,\ f \in K[D]\backslash K$ par le

Théorème *de Bézout avec limitation des degrés*
Si $f,\ L \in K[D]\backslash K$ vérifient $f \vee_g L = 1$ alors $\exists P,\ Q \in K[D]$ avec $deg(Q) < deg(f)$, $deg(P) < deg(L)$ et $Pf + QL = 1$.
Preuve : On ne perd rien à la généralité de la démonstration si on suppose que $deg(L) = max(deg(L), deg(f)) = k > 0$, on distingue alors deux cas :

- (i) $deg(L) > deg(f)$: si $a_k \in K\backslash\{0\}$ est le coefficient de D^k dans L alors $f \vee_g L = f \vee_g a_k^{-1} L = 1$ et on peut écrire $a_n^{-1} L = D^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i D^i$ et $f = \sum_{i=0}^{k-1} b_i D^i$ où les b_i ne sont pas tous nuls. Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ \ldots,\ e_k)$ la base canonique de K^k

et ∇ la connexion dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est la matrice compagnon de dernière colonne $\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{k-1} \end{pmatrix}$ alors e_1 est cyclique d'ordre k pour ∇, $L_{\nabla,e_1} = a_n^{-1}L$ et $f_{\nabla,e_1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} b_i e_{i+1}\right) = f$. Nous appliquons le lemme précédent : $\exists P',\ Q' \in K[D],\ P'f + Q'a_k^{-1}L = 1$ et $deg(P') < deg(a_n^{-1}L)$ et $deg(Q') < deg(f)$; le théorème vient alors en posant $P = P'$ et $Q = Q'a_k^{-1}$.

- (ii)$deg(L) = deg(f)$: nous posons $L = \sum_{i=0}^{k} a_i D^i$ et $f = \sum_{i=0}^{k} b_i D^i$ avec $a_k \neq 0$, $b_k \neq 0$ et nous considérons R le reste de la division euclidienne à gauche de f par L alors, l'algorithme de calcul de p.g.c.d par divisions euclidiennes indique que $1 = f \vee_g L = R \vee_g L$ il existe donc $P',\ Q' \in K[D]$ avec $deg(Q') < deg(R)$ et $deg(P') < deg(L)$ tels que $P'R + Q'L = 1$. Mais $f = aL + R$ avec $a \in K\backslash\{0\}$, il vient $R = f - aL$ puis $P'f + (Q' - P'a)L = 1$. On pose $P = P'$ et $Q = Q' - P'a$ alors, $deg(P) < deg(L)$ et $deg(Q) < deg(L) = deg(F)$ (puisque $deg(a) = 0$) et $Pf + QL = 1$.

Corollaire : Si $f, L \in K[D]\backslash K$ vérifient $f \vee_g L = d$ alors $\exists P, Q \in K[D]$ avec $deg(Q) < deg(f) - deg(d)$ et $deg(P) < deg(L) - deg(d)$ tels que $Pf + QL = d$.
Preuve : Posons $f = f'd$ et $L = l'd$ alors $f' \vee_g L' = 1$ donc $\exists P', Q' \in K[D]$ avec $deg(Q) < deg(f') = deg(f) - deg(d)$ et $deg(P) < deg(L') = deg(L) - deg(d)$ et $Pf' + QL' = 1$.

$$Pf' + QL' = 1 \Rightarrow Pf'd + QL'd = Pf + QL = d$$

Nous pouvons alors énoncer le
Corollaire des degrés : $\forall P, Q \in K[D]$

$$deg\,(P \vee_g Q) + deg\,(P \wedge_g Q) = deg(P) + deg(Q)$$

Preuve : on ne perd rien à la généralité du raisonnement si on suppose que $deg(P) \geq deg(Q)$.

- si $P \vee_g Q = 1$
  - si $deg(P) > deg(Q)$ alors, si on pose $k = deg(P)$ et si $a_k \in K\backslash\{0\}$ est le coefficient dominant de P, on peut écrire

$$\begin{cases} P \wedge_g Q &= a_k^{-1} P \wedge_g Q \\ P \vee_g Q &= a_k^{-1} P \vee_g Q = 1 \\ a_k^{-1} P &= D^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i D^i \\ Q &= \sum_{i=0}^{k-1} b_i D^i \end{cases}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ la base canonique de K^n et ∇ la connexion dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice compagnon de dernière colonne le vecteur $\begin{pmatrix} c_0 \\ \ldots \\ c_k \end{pmatrix}$ alors e_1 est cyclique pour ∇, $L_{\nabla,e_1} = a_k^{-1}P$ et $f_{\nabla,e_1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} b_i e_{i+1}\right) = Q$. Si nous posons $z = \sum_{i=0}^{k-1} b_i e_{i+1}$ alors, d'après le lemme du transporteur, $\exists a \in K[D]\setminus\{0\}$

$$L_{\nabla,z} f_{\nabla,e_1}(z) = a f_{\nabla,e_1}(z) \wedge_g L_{\nabla,e_1}$$

On a alors $deg\left(a f_{\nabla,e_1}(z) \wedge_g L_{\nabla,e_1}\right)$

$$\begin{aligned} &= deg\left(P \wedge_g Q\right) \\ &= deg\left(L_{\nabla,z} f_{\nabla,e_1}(z)\right) \\ &= deg\left(L_{\nabla,z}\right) + deg\left(f_{\nabla,e_1}(z)\right) \\ &= deg(P) + deg(Q) \\ &= deg(P) + deg(Q) - deg\left(P \vee_g Q\right) \end{aligned}$$

qui donne le corollaire.

– si $deg(P) = deg(Q)$ alors on pose $k = deg(P)$, le corollaire des degrés étant trivial si $k = 0$, on suppose que $k > 0$ et on pose $a_k \neq 0$, $b_k \neq 0$ les coefficients dominants de P, Q, $L = a_k^{-1}P$ et $f = b_k^{-1}Q$. Puisque ces polynômes sont unitaires, la division euclidienne à gauche de L par f donne

$L = f + R$ avec $deg(R) < k$. Les *tautologies* $\forall P$,

$$\begin{aligned} Pf = PL - PR &\Leftrightarrow PR = PL - Pf \\ &\Leftrightarrow PL = PR + Pf \end{aligned}$$

se spécialisent sur $K[D]$ en les égalités ensemblistes $(L : f)_g = (L : R)_g$ et $(f : L)_g = (f : R)_g$. Le lemme du transporteur, appliqué à L et f, s'écrit

$$\begin{aligned} (L)_g \cap (f)_g &= (L : f)_g f \\ &= (L : R)_g f \\ &= (f : L)_g L \\ &= (f : R)_g L \end{aligned}$$

Remarquons que R est à la fois le reste de la division de L par f et de f par L. L'algorithme des divisions euclidiennes à gauche donne à la fois $\begin{cases} 1 = L \vee_g f = f \vee_g R \\ 1 = f \vee_g L = L \vee_g R \end{cases}$

De $deg(R) < deg(L)$ et $L \vee_g R = 1$ on déduit, d'après l'item qui précède, la suite d'égalités équivalentes

$$\begin{aligned} deg((L : R)R) + deg(L \vee_g R) &= deg(R) + deg(L) \\ deg((L : f)R) + deg(L \vee_g f) &= deg(R) + deg(L) \\ deg(L : f) + deg(R) + deg(L \vee_g f) &= deg(R) + deg(L) \\ deg(L : f) + deg(f) + deg(L \vee_g f) &= deg(L) + deg(f) \\ deg(L \wedge_g f) + deg(L \vee_g f) &= deg(L) + deg(f) \end{aligned}$$

Nous concluons en prouvant l'égalité

$$
\begin{aligned}
(P:Q)_g = (P':Q')_g : \\
(P':Q')_g &= \{\mathcal{P} \in K[D]/\ \mathcal{P}Q' \in (P')_g\} \\
&= \{\mathcal{P} \in K[D],\ \exists \mathcal{Q} \in K[D]/\mathcal{P}Q' = \mathcal{Q}P'\} \\
&= \{\mathcal{P} \in K[D],\ \exists \mathcal{Q} \in K[D]/\mathcal{P}Q'd = \mathcal{Q}Pd'\} \\
&= \{\mathcal{P} \in K[D],\ \exists \mathcal{Q} \in K[D]/\mathcal{P}Q = \mathcal{Q}P\} \\
&= \{\mathcal{P} \in K[D]/\ \mathcal{P}Q \in (P)_g\} \\
&= (P:Q)_g
\end{aligned}
$$

Si $f_{\nabla,y}(z) \vee_g L_{\nabla,y} = d \neq 1$

Soit $\xi = \phi^{-1}_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y}(d) \in V(\nabla, y)$ **alors** ξ **est cyclique pour** ∇ **d'ordre** $k - deg(d)$ **et donc** $V(\nabla, \xi) \subsetneq V(\nabla, y)$**.**

Preuve : Si $f_{\nabla,y}(z) \vee_g L_{\nabla,y} = d \neq 1$ alors

$$
\exists P, Q \in K[D] \begin{cases} d &= Pf_{\nabla,y}(z) + QL_{\nabla,y} \\ deg(P) &< deg\left(L_{\nabla,y}\right) - deg(d) \\ deq(Q) &< deg\left(f_{\nabla,y}\right) - deg(d) \end{cases}
$$

Soit ξ l'image de d par $\phi^{-1}_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y}$ alors $\xi = P_\nabla(z)$. Comme $deg(d) \leq f_{\nabla,z} \leq k-1$, on peut écrire $d = \sum_{i=0}^{k-1} d_i D^i$ puis

$$
\xi = \sum_{i=0}^{k-1} d_i \phi^{-1}_{\nabla,y} \circ p_{\nabla,y}\left(D^i\right) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i \nabla^i(y)
$$

puis $f_{\nabla,y}(\xi) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i D^i = d$. $\mathcal{P} \in K[D]$ est annulateur de ξ relativement à ∇ si et seulement si $\mathcal{P} f_{\nabla,y}(\xi) \in \left(L_{\nabla,y}\right)_g$ c'est à dire si et seulement si il appartient à l'idéal $\left(L_{\nabla,y} : d\right)_g$: le polynôme

annulateur de ξ relativement à ∇ de degré minimum est $L_{\nabla,y} : d$ dont le degré est déterminé par la relation

$$((L_{\nabla,y} : d)\, d)_g = (L_{\nabla,y})_g \cap (d)_g = (L_{\nabla,y})_g$$

qui donne $deg(d) + deg\,(L_{\nabla,y} : d) = k$ soit $deg\,(L_{\nabla,y} : d) = k - deg(d)$ qui est l'ordre de ξ.

Si $L_{\nabla,y}$ est irréductible

Lemme : Soit $P \in K[D]$ alors P est irréductible si et seulement si

$$\forall Q \in P[D]\ deg(Q) < deg(P) \Rightarrow P \vee_g Q = 1$$

Preuve :

- Si P n'est pas irréductible : $\exists R,\ Q \in K[D]\backslash K\ P = QR$, on a alors $0 < deg(R) < deg(P)$ et $R \vee_g P = aR$ avec $a \in K\backslash\{0\}$ soit $R \vee_g P \neq 1$.
- Si

  $$\exists Q \in P[D]\,(deg(Q) < deg(P)) \wedge (P \vee_g Q \neq 1)$$

  alors $R = deg(P \vee_g Q) > 0$ et c'est un diviseur à gauche de P donc $\exists \mathcal{Q} \in K[D],\ P = \mathcal{Q}R$, $deg(\mathcal{Q}) > 0$ puisque $deg(R) < deg(P)$. P, le produit de deux éléments de $K[D]\backslash K$, n'est donc pas irréductible.

Théorème Si y et cyclique d'ordre k et $L_{\nabla,y}$ est irréductible alors

- $\forall z \in V(\nabla, y)$, z est cyclique d'ordre k (et donc $V(\nabla, y) = V(\nabla, z)$).
- $\forall z \in V(\nabla, y)$, $L_{\nabla,z}$ est irréductible.

Preuve :

- Soit $z \in V(\nabla, y)$ alors

  $$deg\left(f_{\nabla,y}(z)\right) \leq k - 1 < k = deg(L_{\nabla,y})$$

  $L_{\nabla,y}$ est irréductible donc $f_{\nabla,y}(z) \vee_g L_{\nabla,y} = 1$ ce qui entraîne, d'après ce qui précède, $V(\nabla, z) = V(\nabla, y)$ et donc $dim\left(V(\nabla, z)\right) = k$ ce qui est équivalent à z cyclique d'ordre k.

- Supposons que $L_{\nabla,z}$ ne soit pas irréductible alors $\exists L', d \in K[D]\backslash K,\ L_{\nabla,z} = L'd$. Posons $d = \sum_{i=0}^{deg(d)} d_i D^i$ et $\omega = \sum_{i=0}^{deg(d)} d_i \nabla^i(z)$ alors $f_{\nabla,z}(\omega) = d$, on a alors $f_{\nabla,z}(\omega) \vee_g L_{\nabla,z} = d$. D'après ce qui précède si $\xi = \phi_{\nabla,z}^{-1} \circ p_{\nabla,z}(d)$ alors

  $$dim(V(\nabla, \xi)) =$$
  $$dim(V(\nabla, z)) - deg(d) < dim(V(\nabla, z)) = k$$

  mais, comme $\xi \in V(\nabla, y)$ on a $dim(V(\nabla, \xi)) = k$ ce qui est contradictoire.

Sous-espaces vectoriels stables de $V(\nabla, y)$

Idéaux associés aux sous-espaces stables de $V(\nabla, y)$

Propriété : Un sous-espace vectoriel V d'un K-espace vectoriel E muni d'une connexion vectorielle ∇ est stable pour ∇ si et seulement si $V(\nabla) \subset V$. On a la propriété :

- Soit $y \in E$ et I un idéal à gauche de $K[D]$ alors l'ensemble $I(y) = \{P(\nabla)(y)/P \in I\}$ est un sous-espace vectoriel stable pour ∇.
- Si V est un sous-espace vectoriel de E stable pour ∇ et s'il existe $y \in E$ tel que $V \subset V(\nabla, y)$ alors il existe I un idéal à gauche de $K[D]$ tel que $V = I(y)$.

Preuve :

- Soient $x, z \in I(y)$, $\lambda, \mu \in K$ alors $\exists P, Q \in I$, $x = P(\nabla)(y)$ $z = Q(\nabla)(y)$ et on a :
  - $0 \in I$ donc $0 = 0(\nabla)(y) \in I(y)$
  - $$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= (\lambda P(\nabla)(y) + \mu Q(\nabla)(y)) \\ &= (\lambda P + \mu Q)(\nabla)(y) \end{aligned}$$

    I est un idéal donc $\lambda P + \mu Q \in I$ et donc $\lambda x + \mu y \in I(y)$: ce qui achève de montrer que I est un K-espace vectoriel.

– I est un idéal donc

$$P \in I \Rightarrow DP \in I \Rightarrow \nabla\left(P(\nabla(y))\right) = \nabla(x) \in I(y)$$

ceci étant vrai pour tout x prouve que $I(y)$ est stable pour ∇.

- Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $V \subset V(\nabla, y)$ et

$$I = \{P \in K[D]/P(\nabla)(y) \in V\}$$

alors $0 \in I$ puisque $V \ni 0 = 0(\nabla)(y)$, si $P, Q \in I$ alors

$$(P+Q)(\nabla)(y) = P(\nabla)(y) + Q(\nabla)(y) \in V$$

puisque $P(\nabla)(y) \in V$ et $Q(\nabla)(y) \in V$ prouve que $P + Q \in I$,

$$(-P)(\nabla)(y) = -P(\nabla)(y) \in V$$

puisque $P(\nabla)(y) \in V$ et $P(\nabla)(y) \in V$ prouve que $-P \in I$ et $\forall R \in K[D]$

$$(R.P)(\nabla)(y) = R(\nabla)\left(P(\nabla)(y)\right) \in V$$

puisque $P(\nabla)(y) \in V$ et V stable pour ∇ prouve que $R.P \in I$: ceci prouve que I est un idéal. Nous prouvons à présent que $V = I(y)$ $I(y)$ est un sous-espace vectoriel de $V(\nabla, y)$ stable pour ∇ et, par construction, $\forall P \in I(y)$, $P(\nabla)(y) \in V$. On a donc $I(y) \subset V$. $\forall z \in V$, $z \in V(\nabla, y)$, donc

$\exists P_z,\ z = P_z(\nabla)(y)$ donc $z \in I(y)$: ceci étant vrai pour tout z dans V on a $V \subset I(y)$.

Lemme : Soient $F,\ G$ deux sous-espaces vectoriels de E, on suppose que

$$(\exists y \in E)\ F, G \subset V(\nabla, y)$$

alors si I et J sont des idéaux à gauche de $K[D]$ tels que $F = I(y)$ et $G = J(y)$ alors $F + G = (I + J)(y)$.

Preuve : Soit $z \in F + G$ alors $z = w + x$ avec $w \in F = I(y)$ et $x \in G = J(y)$, donc $(\exists (P, Q) \in I \times J),\ (w, x) = (P(\nabla)(y), Q(\nabla)(y))$. On a alors $z = (P + Q)(\nabla)(y)$ avec $P+Q \in I+J$ soit $z \in (I + J)(y)$.

Si $z \in (I + J)(y)$ alors $z = (P + Q)(\nabla)(y)$ avec $(P, Q) \in I \times J$, soit $z = w + x$ où $w = P(\nabla)(y) \in F$ et $x = Q(\nabla)(y) \in G$.

Lemme : Soient y cyclique d'ordre k pour ∇, $E,\ F$ deux espaces vectoriels tels que $E,\ F \subset V(\nabla, y)$ alors, si I et J sont des idéaux à gauche de $K[D]$ tels que $E = I(y)$ et $F = J(y)$, $E = F$ si et seulement si $\begin{cases} I \subset J + (L_{\nabla,y})_g \\ J \subset I + (L_{\nabla,y})_g \end{cases}$

Preuve : On montre que

$$E \subset F \Rightarrow I \subset J + (L_{\nabla,y})_g$$

Chacune des propositions est équivalente à celle qui la précède :

- $\forall x \in E,\ x \in F$
- $\forall P \in I, \exists Q \in J,\ P(\nabla)(y) = Q(\nabla)(y)$

- $\forall P \in I, \exists Q \in J, R \in K[D],\ P = Q + RL_{\nabla,y}$
- $I \subset J + (L_{\nabla,y})_g$

et en permutant E et F, I et J, chacune des propositions suivantes est équivalente à celle qui la précède :

- $\forall x \in F,\ x \in E$
- $\forall P \in J, \exists Q \in I,\ Q(\nabla)(y) = P(\nabla)(y)$

- $\forall P \in J, \exists Q \in I, R \in K[D],\ Q = P + RL_{\nabla,y}$
- $J \subset I + (L_{\nabla,y})_g$

Définition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie stable pour ∇, un sous-espace vectoriel M de E non réduit à $\{0\}$ est dit minimal s'il est minimal pour l'inclusion dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E stables pour ∇ et non réduits à $\{0\}$.

Propriété : Pour tout espace vectoriel E non nul, stable et de dimension finie, il existe des sous-espaces vectoriels stables et minimum non réduits à $\{0\}$.

Preuve : E est non nul, stable et de dimension

finie, c'est un sous-espace vectoriel stable non nul de E. L'ensemble S des sous-espaces vectoriels stables non nuls de E n'est pas vide et tout ses éléments sont des espaces vectoriels stables de dimension inférieure ou égale à $dim(E)$. L'ensemble V des valeurs des dimensions des éléments de S est un ensemble fini d'entiers positifs non nuls. Il existe donc dans S un élément dont la dimension est le minimum des valeurs des dimensions des éléments de S . Cet élément F est un sous-espace vectoriel stable de E non nul. Il est de dimension finie et ses sous-espaces vectoriels propres ne sont pas stables, sinon F ne serait pas un sous-espace vectoriel de E stable non nul de dimension minimum.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M est un sous-espace vectoriel de E stable et minimum non réduit à $\{0\}$.

(ii) $\forall z \in M\backslash\{0\}$, $M = V(\nabla, z)$ et $L_{\nabla,z}$ est irréductible.

(iii) $\exists z \in M\backslash\{0\}$, $M = V(\nabla, z)$ et $L_{\nabla,z}$ est irréductible.

Preuve : L'ensemble des suites $(V_i)_i$ -nécessairement finies d'au plus $dim(E)$ termes- de sous-espaces vectoriels stables pour ∇ : $(V_i)_i = (V(\nabla, y_i))_i$ avec $y_i \in E\backslash\{0\}$, strictement décroissantes pour l'inclusion n'est pas vide car il

contient la suite à un seul terme $V_0 = V(\nabla, y_0)$ avec $y_0 \in E\backslash\{0\}$. Considérons une suite $(W_i)_i$ à $k \leq dim(E)$ termes pour laquelle la longueur- i.e. le nombre de termes de la suite- est le maximum de la longueur de telles suites $(V_i)_i$, alors W_k est un sous-espace vectoriel de E stable et non réduit à $\{0\}$ et nous prouvons que W_k est minimum : dans le cas contraire, il existe $y_{k+1} \in E\backslash\{0\}$ tel que $W_{k+1} = V(\nabla, y_k) \subset W_k$ et k n'est pas le maximum.

Nous prouvons par l'absurde que $(i) \Rightarrow (ii)$: supposons (i) et $\exists z \in M,\ L_{\nabla,z}$ non irréductible alors d'après la contraposée du théorème de la page 46 il existe dans M un vecteur w cyclique non nul d'ordre plus $l < k$ le sous-espace vectoriel de M de base $(w, \ldots,\ \nabla^{l-1}(w))$ est stable pour ∇ de dimension $l < k = dim(M)$ et M n'est pas minimum.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ parce que M n'est pas réduit à 0.

Nous prouvons par l'absurde que $(iii) \Rightarrow (i)$: supposons (iii) et M non stable ou non minimum. D'après le théorème de la page 46 tout vecteur z non nul de M est cyclique d'ordre $deg\,(L_{\nabla,z})$ et l'ensemble des espaces vectoriels $\{V(\nabla, z)/z \in M\}$ est un singleton $\{N\}$ stable pour ∇ avec $N \subset M$. Si $N = M$ comme M n'est pas minimum il existe un sous espace vecto-

riel stable minimum de M de dimension strictement plus petite que M qui ne peut-être que N ce qui contredit que $N = M$. Si $N \neq M$ alors si on remarque que, par définition de N- puisque $\forall z,\ z \in V(\nabla, z)$- N contient M ce qui contredit $N \subset M$ et $N \neq M$. Par impossibilité du tiers exclus entre $N = M$ et $N \neq M$, M est stable minimum.

Lemme : Soit V un espace vectoriel de dimension finie différente de 0 sur K est stable minimum pour une connexion ∇ non nilpotente alors l'ensemble $\{L_{\nabla,u}/u \in V\}$ n'est pas fini.

Preuve : Supposons que l'ensemble $\{L_{\nabla,u}/u \in V\}$ soit fini et égal à $\{L_1,\ \ldots,\ L_s\}$ alors si $P = L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_s$ on a

$$\forall u \in V,\ P(\nabla)(u) = 0$$

et en particulier :

$$\forall \lambda \in K,\ \forall u \in V,\ P(\nabla)(\lambda u) = 0$$

Soit ϕ l'homomorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}$ vers K tel que si $n > 0$ alors $\phi(n) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\ fois}$ alors on pose pour des entiers n, k tels que $n \geq k \geq 0$ $\mathbf{C}_n^k = \phi\left(C_n^k\right)$. Par application de ϕ, indépendamment de la caractéristique de K la proposition qui suit est vraie :

$$(\forall k, n \in \mathbb{N}),\ k + 1 \leq n \Rightarrow \mathbf{C}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{C}_n^k + \mathbf{C}_n^{k+1}$$

Grâce à elle on peut obtenir, par récurrence sur k, la proposition :

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ (\lambda \in K) \wedge (u \in V)$$
$$\Downarrow$$
$$\nabla^k(\lambda u) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{C}_k^j D^j(\lambda) \nabla^{k-j}(u)$$

Pour $j \in \mathbb{N}$ et $P \in K[D]$ nous notons $P^{(j)}$ l'image de P par l'application linéaire définie sur la base $\left(D^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ par $(D^k)^{(j)} = 0$ si $j \geq k$ et $(D^k)^{(j)} = \mathbf{C}_k^j D^{k-j}$ si $j \leq k$ alors on a la proposition :

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ (\lambda \in K) \wedge (u \in V)$$
$$\Downarrow$$
$$\nabla^k(\lambda u) = \sum_{j=0}^{k} D^j(\lambda)(D^k)^{(j)}(\nabla)(u)$$

puis par linéarité on a la proposition :

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\lambda \in K) \wedge (u \in V)$$
$$\Downarrow$$
$$P(\nabla)(\lambda u) = \sum_{j=0}^{deg(P)} D^j(\lambda) P^{(j)}(\nabla)(u)$$

Pour $P = L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_s$, et comme $\forall u \in V$, $P(\nabla)(u) = 0$, on obtient

$$\forall \lambda \in K,\ \forall u \in V$$
$$P(\nabla)(\lambda u) = \sum_{j=1}^{deg(P)} D^j(\lambda) P^{(j)}(\nabla)(u)$$

Si $L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_s = \sum_{k=0}^{deg(P)} a_k D^k$ on a : si $j > deg(P)$ alors $P^{(j)} = 0$ sinon $P^{(j)} = \sum_{k=j}^{deg(P)} \mathbf{C}_k^j a_k D^{k-j}$, de sorte que

$$\forall \lambda \in K,\ \forall u \in V$$
$$0 = P(\nabla)(\lambda u) = \sum_{j=1}^{deg(P)} D^j(\lambda) \sum_{k=j}^{deg(P)} \mathbf{C}_k^j a_k \nabla^{k-j}(u)$$
$$0 = P(\nabla)(\lambda u) = \sum_{j=1}^{deg(P)} \sum_{k=j}^{deg(P)} D^j(\lambda) \mathbf{C}_k^j a_k \nabla^{k-j}(u)$$

On pose $l = k - j$ on a alors

$$0 = P(\nabla)(\lambda u) =$$
$$\sum_{l=0}^{deg(P)-1} \sum_{k=l+1}^{deg(P)} D^{k-l}(\lambda) \mathbf{C}_k^{k-l} a_k \nabla^l(u)$$
$$= \sum_{l=0}^{deg(P)-1} \left(P^{(l)}(\lambda) - a_l \right) \nabla^l(u)$$

Quelque soit le choix de $\lambda \in K$ le polynôme $\sum_{l=0}^{deg(P)-1} \left(P^{(l)}(\lambda) - a_l \right) D^l$ annule tout u dans V,

il annule en particulier les $u \in V$ tels que $L_{\nabla,u} = L_i$ pour $i = 1, \ldots, s$. Pour $i = 1, \ldots, s$ c'est un multiple de L_i et donc de $P = L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_s$. Mais puisque ce polynôme est de degré $deg(P) - 1 < deg(P)$ il est nul et on a $\forall \lambda \in K,\ \forall l \in \{0 \ldots, deg(P) - 1\}$

$$P^{(l)}(\lambda) - a_l = 0$$

$$P^{(l)}(\lambda) = a_l$$

En remarquant que $P^{(l)}(\lambda+\lambda) = P^{(l)}(\lambda)+P^{(l)}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in K$ on obtient, indépendamment de la caractéristique de K, $a_l = a_l+a_l$, et donc $a_l = 0$, pour $k = 0, \ldots, \deg(P)-1$. P qui est unitaire est donc égal à $D^{deg(P)}$. Comme $P(\nabla)(u) = 0,\ \forall u \in V$ on a $\nabla^{deg(P)}(u) = 0,\ \forall u \in V$: la connexion est nilpotente.

Lemme : Sur un espace vectoriel de dimension finie il n'existe pas de connexion linéaire nilpotente.

Preuve : Soient ∇ une connexion linéaire et p un entier tel que $\nabla^p = 0$ alors pour tout couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la formule de changement de base s'écrit

$$(\nabla^p)_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\nabla^p)_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} + P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}D\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)$$

Elle entraîne que $D\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right) = 0$ soit $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in Gl_n(K_D)$ pour tout couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

ce qui entraîne que $K_D = K$ soit $D = 0$. Or D est supposé non nul, il y a contradiction.

Lemme du sous-recouvrement stable : Soient $y \in E$ et V un sous-espace vectoriel de $V(\nabla, y)$ stable pour ∇, p_V la projection canonique de $V(\nabla, y)$ sur $V(\nabla, y)/V$ alors il n'existe qu'une connexion ∇/V vers $V(\nabla, y)/V$ qui rende commutatif les shémas :

$$\begin{array}{ccc} V(\nabla,y) & \xrightarrow{\nabla} & V(\nabla,y) \\ \downarrow{\scriptstyle p_V} & & \downarrow{\scriptstyle p_V} \\ V(\nabla,y)/V & \xrightarrow{\nabla/V} & V(\nabla,y)/V \end{array}$$

$\forall P \in K[D]$:

$$\begin{array}{ccc} V(\nabla,y) & \xrightarrow{P(\nabla)} & V(\nabla,y) \\ \downarrow{\scriptstyle p_V} & & \downarrow{\scriptstyle p_V} \\ V(\nabla,y)/V & \xrightarrow{P(\nabla/V)} & V(\nabla,y)/V \end{array}$$

Preuve : Soient $x,\ z \in V(\nabla, y)$, si $x - z \in V$ alors $\nabla(x-z) \in V$ soit $\nabla(x) - \nabla(z) \in V$ il existe donc une seule application ∇/V de $V(\nabla, y)/V$ vers $V(\nabla, y)/V$ qui rende le premier shéma commutatif : c'est l'application qui à la classe de x *modulo* V, notée x/V, associe la classe de $\nabla(x)$ *modulo* V : $\nabla/V(x/V)$. Cette application est une connexion vectorielle : soient $x,\ z \in V(\nabla, y)$ alors $\nabla(x+z) - \nabla(x) - \nabla(z) = 0 \in V$ ce qui prouve

que ∇/V est additive. Soient $x,\ a \in V(\nabla, y) \times K$ alors $\nabla(ax) - a\nabla(x) - D(a)x = 0 \in V$ ce qui prouve que $\nabla/V(ax) - a\nabla/V(x) - D(a)x = 0$. Nous *déduisons par combinaison linéaire*

$$\forall P \in K[D],\ p_V \circ P(\nabla) = P(\nabla/V) \circ p_V$$

de $\forall n \in \mathbb{N},\ p_V \circ \nabla^n = (\nabla/V)^n \circ p_V$ qui se montre par une récurrence élémentaire. Cette assertion est vraie pour $n = 0,\ 1$, supposons la vraie pour $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\begin{aligned} p_V \circ \nabla^{n+1} &= p_V \circ \nabla^n \circ \nabla \\ &= (\nabla/V)^n \circ p_V \circ \nabla \\ &= (\nabla/V)^n \circ \nabla/V \circ p_V \\ &= (\nabla/V)^{n+1} \circ p_V \end{aligned}$$

Du lemme du sous-recouvrement stable se déduit cette relation : pour tout vecteur cyclique y d'ordre fini k relativement à une connexion vectorielle ∇, le polynôme annulateur $L_{\nabla/V,y/V}$ de sa projection canonique sur un sous-espace vectoriel stable V divise à gauche le polynôme annulateur du vecteur cyclique et si le sous-espace vectoriel V est stable minimum alors le polynôme annulateur $L_{\nabla/V,y/V}$ est irréductible, la connexion vectorielle sur ce sous-espace est alors qualifiée de connexion irréductible.

Lemme : Soit E un K-espace vectoriel et une

connexion vectorielle ∇ sur E relative à la dérivation D sur K, si $\exists z \in E\backslash\{0\}$ et un sous-espace vectoriel V de E stable minimum pour ∇ tel que $V \subsetneq E$ et $E = V \oplus V(\nabla, z)$ alors, si $y = z + v$ où $v \in V\backslash\{0\}$ alors

- $L_{\nabla,y} = L_{\nabla,z} \wedge_g L_{\nabla,v}$
- – Soit $L_{\nabla,z} \vee_g L_{\nabla,v} \neq 1$ et $L_{\nabla,y} = L_{\nabla,z}$.
  – Soit $L_{\nabla,z} \vee_g L_{\nabla,v} = 1$ et $E = V(\nabla, y)$.

Preuve : Si $y = z+v$ alors si P est un polynôme annulateur de y relativement à ∇ alors $0 = P(\nabla)(y) = P(\nabla)(z) + P(\nabla)(v)$ et comme $P(\nabla)(v) \in V$ et $P(\nabla)(z)$ sont dans deux sous-espaces vectoriels supplémentaire alors $P \in (L_{\nabla,z})_g$ et $P \in (L_{\nabla,v})_g$ donc $P \in (L_{\nabla,z} \wedge_g L_{\nabla,v})_g$. En particulier $L_{\nabla,y} \in (L_{\nabla,z} \wedge_g L_{\nabla,v})_g$: donc $L_{\nabla,z} \wedge_g L_{\nabla,v}$ divise à gauche $L_{\nabla,y}$. Soit à présent un polynome $P \in (L_{\nabla,z} \wedge_g L_{\nabla,v})_g$: P est multiple à gauche de $L_{\nabla,z}$ donc $P(\nabla)(z) = 0$, P est multiple à gauche de $L_{\nabla,v}$ donc $P(\nabla)(v) = 0$, il suit que $P(\nabla)(y) = P(\nabla)(z) + P(\nabla)(v) = 0$ donc $L_{\nabla,y}$ divise à gauche P. Ceci prouve que les idéaux $(L_{\nabla,y})_g$ et $(L_{\nabla,z} \wedge_g L_{\nabla,v})_g$ sont égaux, on a donc l'égalité de leur représentant unitaire soit $L_{\nabla,y} = L_{\nabla,z} \wedge_g L_{\nabla,v}$.
Si $L_{\nabla,z} \vee_g L_{\nabla,v} = 1$ alors, par le corollaire des

degrés,

$$\begin{aligned} deg(L_{\nabla,y}) &= deg(L_{\nabla,z}) + deg(L_{\nabla,v}) \\ &= dim(V) + dim(V(\nabla, z)) + dim(V) \\ &= dim(E) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $E = V(\nabla, y)$ puisque $V(\nabla, y) \subset E$.
Si $L_{\nabla,z} \vee_g L_{\nabla,v} = d \neq 1$ alors $d \notin K$ est diviseur de $L_{\nabla,v}$ irréductible : c'est $L_{\nabla,v}$. $L_{\nabla,v}$ est un diviseur de $L_{\nabla,z}$, on a donc $L_{\nabla,z} = \mathcal{P} L_{\nabla,v}$ puis

$$\begin{aligned} L_{\nabla,z}(\nabla)(y) &= L_{\nabla,z}(\nabla)(z) + \mathcal{P} L_{\nabla,v}(\nabla)(v) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$L_{\nabla,y}$ divise à gauche $L_{\nabla,z}$. Soit à présent $\mathcal{Q} \in K[D]$ tel que $\mathcal{Q}(\nabla)(y) = 0$ alors $\mathcal{Q}$ divise $L_{\nabla,z} \wedge_g L_{\nabla,v} = L_{\nabla,z}$.
Lemme d'Euclide irréductible : Soient $P,\ P_1,\ P_2 \in K[D]$ irréductibles et unitaires, si P divise à gauche $P_1 \wedge_g P_2$ alors $P = P_1$ ou $P = P_2$.
Preuve : Sans perte de généralité nous supposerons que $deg(P_1) = n_1 \geq n_2 = deg(P_2)$.

- Si $P_1 = P_2$ alors $P_1 \wedge_g P_2 = P_1 = P_2$ et si P divise à gauche $P_1 \wedge_g P_2$ il divise à gauche P_1 et P_2 et donc il divise à gauche P_1 ou P_2.
- Si $P_1 \neq P_2$ alors $P_1 \vee_g P_2 = 1$, pour $i = 1,\ 2$ on pose $P_i = \sum_{i=0}^{n_i} a_{j,i} D^i$ avec $a_{n_i} \neq 0$ et C_i la matrice compagnon de $M_{n_i}(K)$ dont la

dernière colonne est le vecteur $\begin{pmatrix} -\frac{a_{0,i}}{a_{n_i,i}} \\ \vdots \\ -\frac{a_{n_i-1,i}}{a_{n_i,i}} \end{pmatrix}$, ∇ la connexion relative à la dérivation D et dont la matrice de exprimée dans la base canonique de $K^{n_1+n_2}$ est $diag\,(C_1,\ C_2)$. Les vecteurs e_1 et e_{n_1+1} sont cycliques pour ∇ d'ordres n_1 et n_2, de polynômes annulateurs de degré minimum P_1 et P_2. Parce que ces polynômes sont irréductibles $V(\nabla, e_1)$ et $V(\nabla, e_{n_1}+1)$ sont des espaces vectoriels stables pour ∇ minimum tels que

$$K^{n_1+n_2} = V(\nabla, e_1) \oplus V(\nabla, e_{n_1+1})$$

et d'après le lemme qui précède $K^{n_1+n_2} = V(\nabla, e_1 + e_{n_1+1})$ et le polynôme annulateur de degré minimum de $e_1 + e_{n_1+1}$ est $P_1 \wedge_g P_2$. Posons $P_1 \wedge_g P_2 = \phi P$ alors, par projection sur $V(\nabla, e_1)$ et sur $V(\nabla, e_{n_1} + 1)$

$$\phi P(\nabla)(e_1 + e_{n_1+1}) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(\phi P(\nabla)(e_1) = 0) \wedge (\phi P(\nabla)(e_{n_1} + 1) = 0)$$

– Si $P(\nabla)(e_1) = 0$ ou $P(\nabla)(e_{n_1} + 1) = 0$ alors P_1 ou P_2 divise P et comme $P,\ P_1,\ P_2$ sont irréductibles et unitaires $P_1 = P$ ou $P_2 = P$.

– Si $P(\nabla)(e_1) \neq 0$ et $P(\nabla)(e_{n_1+1}) \neq 0$ alors ϕ est un polynôme annulateur pour ∇ de $v_1 = P(\nabla)(e_1) \neq 0$ *dans le sous-espace vectoriel stable minimum* $V(\nabla, e_1)$ et $v_2 = P(\nabla)(e_{n_1+1}) \neq 0$ *dans le sous-espace vectoriel stable minimum* $V(\nabla, e_{n_1} + 1)$, on en déduit que $deg(\phi) \geq n_1$ et, de $deg(P) = deg(P_1) + deg(P_2)$, que $deg(P) \leq n_2$.

∗ Si $deg(P) < n_2$ alors, si $v_2 = P(\nabla)(e_{n_1}+1) \in V(\nabla, e_{n_1}+1)\backslash\{0\}$, le polynôme P est égal à $f_{\nabla, e_{n_1+1}}(v)$ et l'annulateur $P_2 : P$ de v est de degré n_2 puisque $V(\nabla, e_{n_1} + 1)$ est un espace vectoriel stable minimum, on en déduit :

$$\exists k \in K[D],\ \phi = k(P_2 : P)$$

Il vient alors

$$P_1 \wedge_g P_2 = k(P_2 : P)P = k(P_2 \wedge_g P)$$

et comme $P_1,\ P_2,\ P$ sont premiers entre eux deux à deux, il vient $deg(P) + deg(k) = n_2$ soit $deg(k) < n_2$. k est un polynôme non nul annulateur de $w_1 = (P_2 : P)P(\nabla)(e_1) \in V(\nabla, e_1)$ et de
$w_2 = (P_2 : P)P(\nabla)(e_{n_1+1}) \in V(\nabla, e_{n_1+1})$.

· Si ni w_1 ni w_2 n'est nul, alors d'après le

lemme qui précède w_1+w_2 est cyclique pour ∇ d'ordre n_1+n_2 ce qui contredit que $k(\nabla)(w_1+w_2)=0$ avec $k\neq 0$ et $deg(k)<n_1+n_2$.

- Si $w_1 = 0$ alors, puisque $deg(P) < n_2 \leq n_1$, le vecteur $v_1 = P(\nabla)(e_1)$ est d'après le lemme qui précède cyclique dans $V(\nabla, e_1)$, il est annulé par le polynôme $P_2 : P$ de degré n_2 ce qui est impossible puisque $n_2 < dim(V(\nabla, e_1)) = n_1$.
- Si $w_2 = 0$ alors, puisque $deg(P) < n_2 \leq n_1$, le vecteur $v_1 = P(\nabla)(e_1)$ est d'après le lemme qui précède cyclique dans $V(\nabla, e_1)$, $w_1 = (P_2 : P)(\nabla)(v_1)$ est encore cyclique dans $V(\nabla, e_1)$ puisque $deg(P_2 : P) = n_2 < n_1$, w_1 est annullé par $k(\nabla)$ ce qui est impossible puisque $deg(k) < n_2 \leq n_1$.

* Si $deg(P) = n_2$ alors $deg(\phi) = n_1$: $V(\nabla, e_1)$ et $V(\nabla, e_{n_1+1})$ étant stables minimum de dimension n_1 et n_2 les ensembles

$$\mathcal{B}_1 = \{\nabla^k(v_1)/0 \leq k \leq n_1 - 1\}$$

et

$$\mathcal{B}_2 = \{\nabla^k(v_2)/0 \leq k \leq n_2 - 1\}$$

sont des parties basiques de $V(\nabla, e_1)$ et $V(\nabla, e_{n_1+1})$. On appelle g l'application linéaire de $V(\nabla, e_1)$ dans $V(\nabla, e_{n_1+1})$ telle que $g(\nabla^k(v_1)) = \nabla^k(v_2)$ pour $k = 0, \ldots, n_1$: cette application est injective. Comme g est une application linéaire de $V(\nabla, e_1)$ dans $V(\nabla, e_{n_1+1})$ et ∇ une connexion vectorielle stable sur $V(\nabla, e_{n_1} + 1)$ l'application linéaire $L = g \circ \nabla - \nabla \circ g$ définie sur $V(\nabla, e_1)$ est à image dans $V(\nabla, e_{n_1} + 1)$, nous l'explicitons par son image de la base $\mathcal{B}_1$. Si $k < n_1 + 1$ alors $L\left(\nabla^k(v_k)\right) = 0$, sinon en posant $\phi = D^{n_1} - \sum_{k=0}^{n_1-1} \phi_k D^k$ on voit que $\nabla^{n_1}(v_1) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \phi_k \nabla^k(v_1)$ ce qui donne

$$\begin{aligned} g\left(\nabla^{n_1}(v_1)\right) &= \sum_{k=0}^{n_1-1} \phi_k \nabla^k(v_2) \\ &= \nabla^{n_1}(v_2) - \phi(\nabla)(v_2) \end{aligned}$$

Mais $\phi(\nabla)(v_2) = \phi P(\nabla)(e_{n_1+1}) = 0$, cela donne $g\left(\nabla^{n_1}(v_1)\right) = \nabla^{n_1}(v_2)$ soit $L\left(\nabla^{n_1-1}(v_1)\right) = 0$: L est donc l'application nulle. Il vient $g \circ \nabla = \nabla \circ g$ puis, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g \circ \nabla^k = \nabla^k \circ g$$

et enfin, par combinaison linéaire $\forall \mathcal{Q} \in K[D],\ g \circ \mathcal{Q}(\nabla) = \mathcal{Q}(\nabla) \circ g$. Pour $\mathcal{Q} = L_{\nabla,v_2}$ et appliquée à v_1 cette égalité devient $0 = L_{\nabla,v_2}(\nabla)(v_1)$. Comme v_1 est cyclique d'ordre $n_1 \geq n_2$, cette égalité prouve que $n_1 = n_2$. L_{∇,v_1} et L_{∇,v_2} sont alors deux polynômes annulateurs unitaires de degré n_1 de v_1, ils sont égaux; et sachant que $P_1 = L_{\nabla,e_1}$ et $P_2 = L_{\nabla,e_2}$ on a $P_1 = P_2$ qui est exclus par hypothèse.

Théorème de décomposition des espaces cycliques Soit y un vecteur cyclique d'ordre k alors il existe $s \in \mathbb{N}$ et $V_1,\ \ldots,\ V_s$ sous-espaces vectoriels stables minimum de $V(\nabla, y)$ tels que $V(\nabla, y) = \bigoplus_{i=0}^{s} V_s$.

Preuve : Si $V(\nabla, y)$ est stable minimum alors on pose $V(\nabla, y) = V_1$ et le théorème est démontré sinon, il existe un sous-espace vectoriel stable minimum $V_1 \subsetneq V(\nabla, y)$ et un supplémentaire W_1 de V_1 tel que $V(\nabla, y) = V_1 \bigoplus W_1$. Pour $t \in \mathbb{N}$ on appelle $\mathcal{P}(t)$ l'assertion $W = \bigoplus_{i=0}^{t} V_i \bigoplus W_t$, avec V_i sous-espaces vectoriels stables minimum de $V(\nabla, y)$ et W_t sous espace vectoriel de $V(\nabla, y)$ égal à $\{0\}$ ou non stable-minimum et on montre que $W_t \neq \{0\} \Rightarrow (\mathcal{P}(t) \Rightarrow \mathcal{P}(t+1))$. Si $V(\nabla, y)$ n'est pas stable-minimum alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie; supposons que pour $t \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(t)$ est vraie

avec $W_t \neq \{0\}$ alors

- Si W_t est stable minimum pour ∇, on pose alors $V_{t+1} = W_t$ et $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie (avec $W_{t+1} = \{0\}$).
- Si W_t n'est pas stable minimum pour ∇ alors il existe un sous-espace vectoriel $V_{t+1} \subsetneq W_t$ stable minimum pour ∇ dont nous appelons W_{t+1} un supplémentaire (nécessairement non réduit à $\{0\}$). On a $V(\nabla, y) = \bigoplus_{i=0}^{t+1} V_i \bigoplus W_{t+1}$ avec $W_{t+1} \neq \{0\}$.

Cette récurrence permet de construire une suite de sous-espaces vectoriels $(W_t)_{t\in\mathbb{N}}$ décroissante pour l'inclusion et telle que

- $V(\nabla, y) = \bigoplus_{i=0}^{t} V_i \bigoplus W_t$ avec V_i sous-espaces vectoriels de $V(\nabla, y)$ stables minimum pour ∇.
- $W_t \neq \{0\} \Rightarrow W_{t+1} \subsetneq W_t$.

Par finitude de la dimension de $V(\nabla, y)$ la suite de sous-espaces vectoriels $W_t \subset V(\nabla, y)$ est de dimension strictement décroissante tant que $W_t \neq \{0\}$: il existe donc un plus petit rang t_0 de la suite pour lequel $W_{t_0} = \{0\}$ on pose $s = t_0$ et on a $\mathcal{P}(s)$ soit $V(\nabla, y) = \bigoplus_{i=0}^{s} V_i$ avec V_i sous-espaces vectoriels stables minimum de $V(\nabla, y)$.

Lemme complet d'Euclide comme corollaire de l'additivité des degrés du p.p.c.m.

de polynômes irréductibles : Soient $L_1, \ldots, L_s \in K[D]$ irréductibles unitaires et deux à deux distincts alors

$$deg\,(L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_s) = \sum_{i=1}^{s} deg(L_i)$$

et si $L \in K[D]$, unitaire et irréductible divise à gauche $L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_s$ alors $\exists i \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $L = L_i$.

Preuve : L'assertion suivante est vraie $\mathcal{P}(2) : \forall a_1, b_1 \in K[D]$,

$$\begin{aligned} deg(a_1 \wedge_g a_2) &= deg(a_1) + deg(a_2) - deg(a_1 \vee_g a_2) \\ &\leq deg(a_1) + deg(a_2) \end{aligned}$$

puis nous prouvons que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(s) & : & deg(a_1 \wedge_g \cdots \wedge_g a_s) \leq \sum_{i=1}^{s} deg(a_i) \\ \Downarrow & & \\ \mathcal{P}(s+1) & : & deg(a_1 \wedge_g \cdots \wedge_g a_{s+1}) \leq \sum_{i=1}^{s+1} deg(a_i) \end{array}$$

Si $\mathcal{P}(s)$ est vraie alors

$$\begin{aligned} deg(a_1 \wedge_g \cdots \wedge_g a_{s+1}) &= deg\,((a_1 \wedge_g \cdots \wedge_g a_s) \wedge_g a_{s+1}) \\ &= deg\,(a_1 \wedge_g \cdots \wedge_g a_s) + deg(a_{s+1}) \\ &\quad -deg\,((a_1 \wedge_g \cdots \wedge_g a_s) \vee_g a_{s+1}) \\ &\leq deg\,(a_1 \wedge_g \cdots \wedge_g a_s) + deg(a_{s+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{s} deg(a_i) + deg(a_{s+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{s+1} deg(a_i) \ : \ \mathcal{P}(s+1) \end{aligned}$$

est vraie.
A partir des polynômes L_i nous allons définir des indices, des matrices, des espaces vectoriels et des connexions vectorielles :

- Pour $i = 1, \ldots, s$ nous posons $L_i = D^{deg(L_i)} - \sum_{j=0}^{deg(L_i)-1} b_{i,j} D^j$ et C_i la matrice compagnon d'ordre $deg(L_i)$ de dernier vecteur-colonne égal à $\begin{pmatrix} b_{i,0} \\ \vdots \\ b_{i,deg(L_i)-1} \end{pmatrix}$.
- Pour r tel que $1 \leq r \leq s$ nous posons $K_r = K^{deg(L_1)+\cdots+deg(L_r)}$ et nous appelons ∇_r la connexion dont la matrice, exprimée dans la base canonique de K_r $\mathcal{B}_r = \left(e_1, \ldots, e_{deg(L1)+\cdots+deg(L_r)}\right)$, est $diag(C_1, \ldots, C_r)$.
- Pour $j \in \{1, \ldots, r\}$ nous posons : si $j > 1$ alors $\sigma(j) = 1 + \sum_{k=1}^{j-1} deg(L_k)$ si $j = 1$ alors $\sigma(j) = 1$.

Par construction et pour $1 \leq r \leq s$ et $1 \leq j \leq r$:

- L_j est le polynôme annulateur de degré minimum de $e_{\sigma(j)}$ relativement à ∇_r.
- $V_j = V\left(\nabla_r, e_{\sigma(j)}\right)$ est un espace vectoriel stable-minimum de dimension $deg(L_j)$ relativement à ∇_r.

- $(e_{\sigma(j)}, e_{\sigma(j)+1}, \ldots, e_{\sigma(j)+deg(L_j)+1})$ est une base de V_j. Le théorème de complétion des bases prouve alors que $K_r = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$.

Nous prouvons alors par récurrence sur r la propriété $\mathcal{P}(r)$:

- $deg(L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r) = deg(L_1) + \cdots + deg(L_r)$
- Si $L \in K[D]$ irréductible divise $L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r$ alors $\exists j \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $L = L_j$.

$\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(r)$ sont déjà établies nous prouvons alors que $\mathcal{P}(r) \Rightarrow \mathcal{P}(r+1)$ par l'absurde en supposant que $\mathcal{P}(r)$ soit vraie et $\mathcal{P}(r+1)$ fausse soit

$$deg(L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_{r+1}) < deg(L_1) + \cdots + deg(L_{r+1})$$

ou il existe L irréductible différent de L_1 et ... L_{r+1} qui divise $L_1 \wedge \cdots \wedge_g L_{r+1}$. Nous distinguons deux cas :

- Si

  $$deg(L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_{r+1}) < deg(L_1) + \cdots + deg(L_{r+1})$$

  alors : puisque

  $$L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r = (L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r) \wedge_g L_{r+1}$$

  et $deg(L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r) = \sum_{i=1}^{r} L_i$ et $\forall a, b \in K[D]$,

  $$deg(a \wedge_g b) = deg(a) + deg(b) - deg(a \vee_g b)$$

c'est que $deg\,((L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r) \vee_g L_{r+1}) > 0$ et donc $(L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r) \vee_g L_{r+1} = d_{r+1} \neq 1$.
Posons (1) $\begin{cases} \mathcal{P}d_{r+1} = L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r \\ \mathcal{Q}d_{r+1} = L_{r+1} \end{cases}$ alors *par le lemme du transporteur*

$$\exists \phi,\, \psi \in K[D],\ (2) \begin{cases} \mathcal{P} &= \phi(L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r)(L_r : d_{r+1}) \\ \mathcal{Q} &= \psi(L_{r+1} : d_{r+1}) \end{cases}$$

En mesurant les degrés de chaque terme de chaque équation du système (1) on a

$$\begin{cases} deg(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} deg(L_i) - deg(d_{r+1}) \\ deg(\mathcal{Q}) &= deg(L_{r+1}) - deg(d_{r+1}) \end{cases}$$

et en mesurant ceux de chaque terme de chaque équation du système (2) on a

$$(3) \begin{cases} deg(\phi) &= -deg(d_{r+1}) - deg(L_r : d_{r+1}) \\ deg(\psi) &= deg(L_{r+1}) - deg(d_{r+1}) - deg(L_r : d_{r+1}) \end{cases}$$

Puisque le degré d'un polynôme non nul est positif ou nul le système (3) est équivalent à

$$\begin{cases} 0 = deg(\phi) &= deg(d_{r+1}) = deg(L_r : d_{r+1}) \\ deg(\psi) &= deg(L_{r+1}) \end{cases}$$

En remarquant que $\mathcal{P},\ \mathcal{Q},\ \phi,\ \psi$ sont unitaires il vient $1 = \phi = d_{r+1} = L_r : d_{r+1}$ et ce qui contredit que $d_{r+1} \neq 1$.

- Si il existe L irréductible différent de L_1 et ... L_{r+1} qui divise $L_1 \wedge \cdots \wedge_g L_{r+1}$ alors d'après l'item précédent $d_{r+1} = 1$ et l'égalité

$deg(L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_{s+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} deg(L_i)$ est vraie, nous introduisons alors la connexion ∇_{r+1} de matrice $diag(C_1, \ldots, C_{r+1})$ sur la base canonique de $K_{r+1} = K^{deg(L_1)+\cdots+deg(L_{r+1})}$. On a la décomposition $K_{r+1} = \bigoplus_{j=1}^{r+1} V(\nabla_{r+1}, e_{\sigma(j)})$ et si nous posons $L_1 \wedge \cdots \wedge_g L_{r+1} = \phi_{r+1} L$ alors $y_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} e_{\sigma(i)}$ admet pour polynôme annulateur relativement à ∇_{r+1} de degré minimum $L_1 \wedge \cdots \wedge_g L_{r+1}$ dont le degré est *précisemment* $dim(K_{r+1})$: on a donc $V(\nabla_{r+1}, y_{r+1}) = K_{r+1}$. Soit $\xi = L(\nabla_{r+1})(y_{r+1})$ alors $f_{\nabla_{r+1}, y_{r+1}}(\xi) = L$ et $L_{\nabla_{r+1},\xi} = L_{\nabla_{r+1},\xi} : L = \phi_{r+1}$. On a la décomposition $\xi = \sum_{j=1}^{r+1} \xi_j$ avec $\xi_j = L(\nabla_{r+1})(e_{\sigma(j)}) \in V_j = V(\nabla_{r+1}, e_{\sigma(j)})$ et nous allons distinguer deux cas :

- Si les ξ_j ne sont pas tous non nuls alors, pour toute valeur j telle que $\xi_j = 0$ on a $L(\nabla_{r+1})(e_{\sigma(j)}) = 0$, L_j le polynôme annulateur de $e_{\sigma(j)}$ relativement à ∇_{r+1} divise L et comme ces deux polynômes sont irréductibles et unitaires, ils sont égaux. Il n'y a donc qu'un seul j tel que $\xi_j = 0$ et pour cette valeur de j $L = L_j$.
- Si tous les ξ_j sont non nuls alors, puisque $\forall j \in \{1, \ldots, r+1\}$ $V(\nabla_{r+1}, e_{\sigma(j)})$ est stable minimum, et que $\xi_j \in V(\nabla_{r+1}, e_{\sigma(j)}) \backslash \{0\}$

$\exists L_1^*, \ \ldots, \ L_{r+1}^* \in K[D]$ avec $\forall j,\ deg(L_j^*) = deg(L_j)$ et L_j^* est le polynôme annulateur de ξ_j de degré minimum L divise à gauche $L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_{r+1}$ donc

$$L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_{r+1} = \Psi L$$

avec $deg(\Psi) < \sum_{i=1}^{r+1} deg(L_i)$. Cette égalité de polynômes prise en $\nabla_{r+1}(e_{\sigma(j)})$ entraîne que

$$\forall j \in \{1, \ \ldots, \ r+1\}, \ \Psi(\nabla_{r+1})(\xi_j) = 0$$

Ψ est un multiple du p.p.c.m. à gauche. de $L_1^*, \ \ldots, \ L_{r+1}^*$ et a donc pour degré *au moins*
$\sum_{i=1}^{r+1} deg(L_i^*) = \sum_{i=1}^{r+1} deg(L_i)$ ce qui est contradictoire.

Corollaire : Soit $L_1, \ \ldots, \ L_r$ des polynômes irréductibles de $K[D]$, non nécessairement distincts, si L irréductible divise à gauche $L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r$ alors L est associé à l'un des polynômes de l'ensemble $\{L_i / \ 1 \leq i \leq r\}$.

Preuve : Soit $L_{\sigma(1)}, \ \ldots, \ L_{\sigma(s)}$ avec $s \leq r$ l'ensemble $\{L_i / \ 1 \leq i \leq r\}$ alors

$$L_{\sigma(1)} \wedge_g \cdots \wedge_g L_{\sigma(s)} = L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r$$

Pour $P \in K[D]$ nous appelons P^* l'unique polynôme unitaire tel que $(L)_g = (L^*)_g$ alors, si L

divise à gauche $L_1 \wedge_g \cdots \wedge_g L_r$ on a

$$(L)_g \subset \cap_{j=1}^{r}(L_j)_g = \cap_{i=1}^{s}(L_{\sigma}(i))_g$$

soit $(L^*)_g \subset \cap_{i=1}^{s}(L_{\sigma(s)})_g = \cap_{i=1}^{s}(L^*_{\sigma(s)})_g$: Le polynôme irréductible unitaire L^* divise à gauche $L^*_{\sigma(1)} \wedge_g \cdots \wedge_g L^*_{\sigma(s)}$ donc pour un $i \in \{1, \ldots, s\}$ $L^* = L^*_{\sigma(i)}$ ce qui prouve que pour un $j \in \{1, \ldots, r\}$ $L = L_j$.

Propriétés arithmétiques de $K[D]$

Dans un anneau principal intègre et commutatif, les éléments irréductibles sont premiers, et tout élément se décompose comme produit d'éléments premiers, dans $K[D]$ *anneau non commutatif et euclidien gradué la notion usuelle d'élément premier doit fait intervenir une notion de produit non commutatif, nous remplacerons avantageusement la notion d'élément premier au sens d'un produit non commutatif par celle d'élément premier au sens d'un p.p.c.m. à gauche. Dans ce qui suit* E *sera un espace vectoriel de dimension non nulle stable pour une connexion vectorielle* ∇ *et on aura donc* $E = V(\nabla, y)$.

Lemme d'existence de vecteur cyclique : Si F est un sous-espace vectoriel de E stable pour ∇ alors il existe un vecteur cyclique pour ∇ (soit $\exists z \in F,\ F = V(\nabla, z)$).

Preuve : Suivant le lemme du décomposition des espaces vectoriels cycliques $\exists s \in \mathbb{N},\ E = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$ où $V_1, \ldots, V_s$ sont des sous-espaces vectoriels stables minimaux tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$.

$$F = F \cap E = F \cap \bigoplus_{i=0}^{s} V_i = \bigoplus_{i=0}^{s} (F \cap V_i)$$

- Si $\exists i \in \{1, \ldots, s\}/V_i = F$: alors, d'après ce qui précède, tout $z \in F \backslash \{0\}$ est cyclique dans F.

- Sinon : on pose $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$, $W_i = F \cap V_i$ alors les $W_i \neq \{0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de F stables pour ∇ comme intersection d'espaces vectoriels stables pour ∇. Ils sont stables minimum dans F : $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$ si G_i est un sous-espace vectoriel de $F \cap V_i$ stable pour ∇ alors c'est un sous-espace vectoriel stable de V_i stable minimum : c'est donc V_i ou $\{0\}$ mais comme $F \cap V_i \subsetneq V_i$ cela ne peut être V_i c'est donc $\{0\}$ et $\{0\} \neq W_i = F \cap V_i$ est un sous-espace vecto-

riel stable minimum dans F. Comme ∇ est une connexion nous pouvons choisir $w_1, \ldots, w_s$ dans $W_1, \ldots, W_s$ de façon à ce que les polynômes irréductibles $L_{\nabla,w_1}, \ldots, L_{\nabla,w_s}$ soient deux à deux distincts, avec ce choix le vecteur $z = w_1 + \cdots + w_s$ est un vecteur cyclique dans F. En effet si

$$P(\nabla)(z) = P(\nabla)(w_1) + \cdots + P(\nabla)(w_s) = 0$$

alors $\forall i \in \{1, \ldots, s\}\ P(\nabla)(w_i) = 0$, donc $P \in (L_{\nabla,w_i})_g$, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$ soit $P \in (L_{\nabla,w_1} \wedge_g \cdots \wedge_g L_{\nabla,w_s})_g$ et $L_{\nabla,w_1} \wedge_g \cdots \wedge_g L_{\nabla,w_s}$ est le polynôme annulateur de plus petit degré de z *dont le degré* $\sum_{i=0}^{s} deg(L_{\nabla,w_i}) = \sum_{i=0}^{s} dim(W_i) = dim(F)$ *est précisemment la dimension de* F.

Arithmétique des p.g.c.d. et des p.p.c.m. des polynômes de $K[D]$

Corollaire de représentation des sous-espaces vectoriels stables de $V(\nabla, y)$
Soit F un sous-espace vectoriel de $E = V(\nabla, y)$ stable pour ∇ alors il existe un unique idéal à gauche I de $K[D]$ tel que $F = I(y)$ et $(L_{\nabla,y})_g \subset I$.
Preuve :

- Existence : Soit z un vecteur cyclique pour F alors si $d = f_{\nabla,y}(z) \vee_g L_{\nabla,y}$ et $\xi = d(\nabla)(y)$

nous savons que $L_{\nabla,y} = L_{\nabla,\xi}d$. Cette égalité entraîne $V(\nabla,\xi) = K[D](\xi)(d)_g(y)$ et $(L_{\nabla,y})_g \subset (d)_g$. Nous posons $f_{\nabla,y}(z) = f \times d$ alors, si $k = dim(E)$, f est un polynôme de degré au plus $k - deg(d) - 1$ tel que $f(\nabla)(\xi) = z$, sachant que

$$dim\,(V(\nabla,\xi)) = deg\,(L_{\nabla,\xi}) = k - deg(d)$$

c'est que $z \in V(\nabla,\xi)$ et $f = f_{\nabla,\xi}(z)$. On a alors

$$\begin{aligned} d &= f_{\nabla,y}(z) \vee_g L_{\nabla,y} \\ &= f_{\nabla,\xi}(z)d \vee_g L_{\nabla,\xi}d \\ &= (f_{\nabla,\xi}(z) \vee_g L_{\nabla,\xi})d \end{aligned}$$

ce qui donne $f_{\nabla,\xi}(z) \vee_g L_{\nabla,\xi} = 1$, nous savons alors que, puisque $z \in V(\nabla,\xi)$ on a $V(\nabla,\xi) = V(\nabla,z) = F$. On a donc $F = (d)_g(y)$ où $d = f_{\nabla,y}(z) \vee_g L_{\nabla,y}$ avec z un vecteur cyclique pour F: ce qui montre l'existence de I.

- Si I et J sont deux idéaux de $K[D]$ tels que $F = I(y) = J(y)$ nous savons alors, d'après le lemme de la page 51, que $I + (L_{\nabla,y})_g = J + (L_{\nabla,y})_g$; Si de plus $(L_{\nabla,y})_g \subset I$ et $(L_{\nabla,y})_g \subset J$ alors $I + (L_{\nabla,y})_g = J + (L_{\nabla,y})_g$ devient $I = J$:

ce qui prouve l'unicité de I.

L'application Φ qui à un idéal I tel que $(L_{\nabla,y})_g \subset I$ associe $I(y)$ (sous-espace vectoriel de E stable pour ∇) est :

- *une bijection additive (i.e. telle que $\Phi(I+J) = \Phi(I) + \Phi(J)$) de l'ensemble des idéaux de $K[D]$ contenant $(L_{\nabla,y})_g$ vers l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E stables pour ∇,*
- *croissante pour l'inclusion (des idéaux).*

Par l'action de Φ^{-1} et des résultats qui précèdent nous en déduisons le

lemme de décomposition de $K[D]$ au sens des p.p.c.m. : Soit $P = \sum_{i=0} a_i D^i \in K[D]$ avec $a_n \neq 0$ nous appelons $\nabla(P)$ la connexion dont la matrice dans la base canonique de K^n est la matrice compagnon de dernière colonne $\begin{pmatrix} \frac{a_0}{a_n} \\ \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$. P admet une décomposition, en produit de $a_n \in K$ et du p.p.c.m. à gauche de r éléments irréductibles $P_1^*, \ldots, P_s^*$ de $K[D]$.

Preuve :

e_1 est cyclique d'ordre n pour ∇ et $V(\nabla, e_1) = K^n$, le théorème de décomposition

des espaces cycliques donne

$$K^n = V(\nabla, e_1) = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$$

avec V_i sous-espaces vectoriels stables minimum de $V(\nabla, e_1) = K^n$ et d'après ce qui précède $L_{\nabla,e_1} = P/a_n$ se décompose comme le produit au sens des p.p.c.m. à gauche de $P_1, \ldots, P_s$ irréductibles unitaires distincts et de degrés $deg(P_i) = dim(V_i)$.

Un théorème de factorialité de la décomposition de $K[D]$ au sens des p.p.c.m. à gauche : *Soit $P = \sum_{i=0} a_i D^i \in K[D]$ avec $a_n \neq 0$ nous appelons $\nabla(P)$ la connexion dont la matrice dans la base canonique de K^n est la matrice compagnon de dernière colonne* $\begin{pmatrix} \frac{a_0}{a_n} \\ \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$

La décomposition de P en produit de $a_n \in K$ et du p.p.c.m. à gauche de r éléments irréductibles $P_1, \ldots, P_s$ de $K[D]$ est unique.

Preuve : Soit une décomposition de $P = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ $(a_n \neq 0)$ en un produit de a_n par le p.p.c.m. à gauche de $P_1, \ldots, P_s$ alors chaque sous-espace vectoriel $(P_i)_g(e_1)$ est image par la bijection Φ, de l'ensemble des idéaux contenant $L_{\nabla,e_1} = P/a_n$ vers l'ensemble des sous-espaces vectoriels stables, pour ∇ de l'espace vectoriel

$V(\nabla, e_1) = K^n$, *puisque chaque* P_i *est irréductible chaque sous-espace vectoriel* $(P_i)_g(e_1)$ *est* ***stable pour*** ∇ ***et minimum***. S'il existe une deuxième décomposition de P en produit de a_n par le p.p.c.m. à gauche de $Q_1, \ldots, Q_r$ *alors nous allons construire deux bases de* K^n *puis définir à l'aide de ces deux bases un isomorphisme linéaire de* K^n *dont nous allons prouver que* $Mat(c)_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = I_n$.
Sans perte de généralité nous pouvons supposer que les polynômes P_i et Q_j sont ordonnés par degrés croissants et nous appelons $\mathcal{A}$ la base

$$\left(a_1, \ldots, \nabla^{deg(P_1)-1}(a_1), \ldots\ldots, a_s, \ldots; \nabla^{deg(P_s)-1}(a_s)\right)$$

et $\mathcal{B}$ la base

$$\left(b_1, \ldots, \nabla^{deg(Q_1)-1}(b_1), \ldots\ldots, b_r, \ldots; \nabla^{deg(P_r)-1}(b_r)\right)$$

où chaque a_i est choisi dans $(P_i)_g(a_1)$ et chaque b_j est choisi dans $(Q_j)_g(b_1)$. Nous appellons c l'isomorphisme qui au k-ième vecteur de base de $\mathcal{A}$ associe le k-ième vecteur de base de $\mathcal{B}$ et nous prouvons que $deg(P_1) = deg(Q_1)$ **et** $P_1 = Q_1$ ce qui amorcera une récurrence et prouvera que $\forall i,\ deg(P_i) = deg(Q_i)$ **et** $Q_i = P_i$, ce qui montrera que $r = s$ et $\forall i,\ Q_i = P_i$ $Mat(c)_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = Id_{K^n}$.

- Si $deg(P_1) < deg(Q_1)$: alors en posant $P_1 = D^{deg(P_1)} + \sum_{i=0}^{deg(P_1)-1} p_i D^i$ de $P_1(\nabla)(a_1) = 0$ il vient

$$\nabla^{deg(P_1)}(a_1) = \sum_{i=0}^{deg(P_1)-1} p_i \nabla^i(a_1)$$

$$c\left(\nabla^{deg(P_1)}(a_1)\right) = \sum_{i=0}^{deg(P_1)-1} p_i c\left(\nabla^i(a_1)\right)$$

$$\nabla^{deg(P_1)}(b_1) = \sum_{i=0}^{deg(P_1)-1} p_i \nabla^i(b_1)$$

soit $P_1(\nabla)(b_1) = 0$ ce qui est impossible car alors P_1 serait de plus petit degré et diviserait Q_1 irréductible.

- Si $deg(Q_1) < deg(P_1)$: alors en posant $Q_1 = D^{deg(Q_1)} + \sum_{i=0}^{deg(Q_1)-1} q_i D^i$ de $Q_1(\nabla)(b_1) = 0$ il vient

$$\nabla^{deg(Q_1)}(b_1) = \sum_{i=0}^{deg(Q_1)-1} q_i \nabla^i(b_1)$$

$$c^{-1}\left(\nabla^{deg(Q_1)}(b_1)\right) = \sum_{i=0}^{deg(Q_1)-1} q_i c^{-1}\left(\nabla^i(b_1)\right)$$

$$\nabla^{deg(Q_1)}(a_1) = \sum_{i=0}^{deg(Q_1)-1} q_i \nabla^i(a_1)$$

soit $Q_1(\nabla)(a_1) = 0$ ce qui est impossible car alors Q_1 serait de plus petit degré et diviserait P_1 irréductible.

Donc $deg(P_1) = deg(Q_1)$ et puisque P_1 et Q_1 sont unitaires $P_1 = Q_1 + R$ avec $deg(R) < deg(P_1) = deg(Q_1)$. Supposons que $P_1 \neq Q_1$ alors puisque ces polynômes sont irréductibles ils sont premiers entre eux et $\exists f, g \in K[D]$ avec $deg(f) < deg(Q_1)$ et $deg(g) < deg(P_1)$ tels que $fP_1 + gQ_1 = 1$ soit $(f+g)Q_1 + fR = 1$, nous en déduisons que $((f+g)Q_1)(\nabla) + (fR)(\nabla) = \nabla$ puis en prenant l'image de cette identité en b_1 $(fR)(\nabla)(b_1) = \nabla(b_1)$ soit $(fR-1)(\nabla)(b_1) = 0$. Nous en déduisons $\exists H \in K[D],\ fR - 1 = HQ_1$ l'identité $(f+g)Q_1 + fR = 1$ devient alors, en remplaçant fR par $1 + HQ_1$, $(f+g+H)Q_1 = 0$. Puisque $K[D]$ est intègre cela entraîne que $H = -g - f$. On obtient alors le système linéaire en f et g

$$\begin{cases} (1)\ \ fR + gQ_1 = 1 \\ (2)\ \ fR + (f+g)Q_1 = 1 \end{cases}$$

Par différence entre (2) et (1) il vient $f = 0$ et $gQ_1 = 1$ qui contredit que $deg(Q_1) \geq 1$. On a donc $P_1 = Q_1$ ce qui montre le théorème.

Nota : En désignant par $\mathcal{C}$ la base canonique de

K^n on obtient le shéma triangulaire

$$\begin{array}{ccc} (E,\mathcal{C}) & \xrightarrow{\quad a \quad} & (E,\mathcal{A}) \\ & {\scriptstyle b}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle c} & \\ & (E,\mathcal{B}) & \end{array}$$

Si $\begin{cases} A = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(a) \\ B = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(b) \\ C = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(c) \end{cases}$ alors $b = c \circ a \Rightarrow \boxed{B = CA}$.

Les égalités

$$\begin{cases} A^{-1}\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} A - A^{-1}D(A) &= diag(P_1,\ \ldots,\ P_s) \\ B^{-1}\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} B - B^{-1}D(B) &= diag(P_1,\ \ldots,\ P_s) \end{cases}$$

deviennent

$$A^{-1}\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} A - A^{-1}D(A) = B^{-1}\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} B - B^{-1}D(B)$$

qui devient après substitution de B par CA

$$A^{-1}\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} A - A^{-1}D(A) = \qquad A^{-1}C^{-1}\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} CA$$
$$-A^{-1}C^{-1}\left((D(C)A + CD(A)\right)$$

qui, après multiplication à gauche par A et à droite par A^{-1}, devient

$$\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} - D(A)A^{-1} = C^{-1}\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} C - C^{-1}D(C) - D(A)A^{-1}$$

ou $\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} = C^{-1}\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} C - C^{-1}D(C)$.

Après multiplication à gauche par C on obtient $C\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} = \left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} C - D(C)$ ou

$D(C) = \left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} C - C\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}}$ soit $\boxed{\left(\nabla\right)_{\mathcal{C}} = \left(\nabla\right)_{C}}$ ce que nous résumons dans le

Premier théorème précisé de factorialité

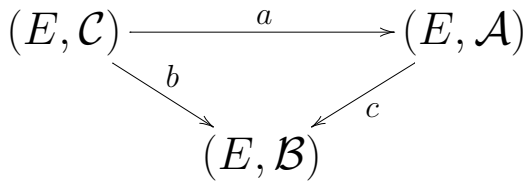
de $K[D]$ au sens des p.p.c.m. à gauche : soit $P = \sum_{i=0} a_i D^i \in K[D]$ avec $a_n \neq 0$ nous appelons ∇ la connexion dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ de K^n est la matrice compagnon de dernière colonne $\begin{pmatrix} \frac{a_0}{a_n} \\ \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$.

- La décomposition de P en produit de $a_n \in K$ et du p.p.c.m. à gauche de s éléments irréductibles $P_1, \ldots, P_s$ de $K[D]$ classés par degrés croissants existe et est unique.
- – Il existe une base $\mathcal{A}$ de K^n telle que $(\nabla)_{\mathcal{A}}$ est une matrice diagonale par blocs et dont la dimension des blocs est croissante par indices croissants.
  – Chaque bloc diagonal D_i est la matrice compagnon dont la dernière colonne est $\begin{pmatrix} p_{i,0} \\ \vdots \\ p_{i,deg(P_i)} \end{pmatrix}$ où

$$P_i = D^{deg(P_i)} - \sum_{j=1}^{deg(P_i)-1} p_{i,j} D^j$$

  – Si $\mathcal{B}$ est une autre base de K^n avec les mêmes propriétés que $\mathcal{A}$ alors on a le shéma

triangulaire

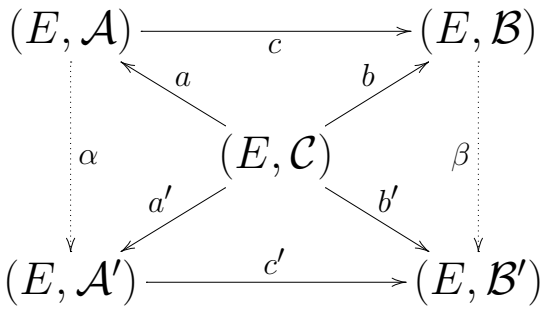


où a, b, c sont les isomorphismes linéaires tels que $\begin{cases} \mathcal{A} &= a(\mathcal{C}) \\ \mathcal{B} &= b(\mathcal{C}) \\ \mathcal{B} &= c(\mathcal{A}) \end{cases}$

– Si C est la base image de $\mathcal{C}$ par c alors

$$\begin{cases} (\nabla)_{\mathcal{A}} &= (\nabla)_{\mathcal{B}} = (\nabla)_{c(\mathcal{A})} \\ (\nabla)_{\mathcal{C}} &= (\nabla)_{C} = (\nabla)_{c(\mathcal{C})} \end{cases}$$

Nota : Si $(\mathcal{A}',\ \mathcal{B}')$ est un autre couple de bases dans lesquelles la matrice de ∇ est compagnon par blocs, **que nous déterminerons** *a posteriori* **par les isomorphismes** $\alpha : (E,\mathcal{A}) \to (E,\mathcal{A}')$ et $\beta : (E,\mathcal{B}) \to (E,\mathcal{B}')$ du shéma qui suit



Nous déterminons d'abord α en déterminant $\mathcal{A}'$ ce qui déterminera a'. Nous choisissons $\mathcal{A}'$ en permutant deux suites de vecteurs consécutifs de $\mathcal{A}$

de manière à ce que la matrice $(\nabla)_{\mathcal{A}'}$ se déduise de la matrice $(\nabla)_{\mathcal{A}}$ par échange de deux blocs compagnons de même dimension que nous déterminerons *a posteriori*. La relation $Mat(\alpha)_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} = I_n$ prouve alors que ces blocs sont égaux. En faisant varier α sur tous les couples de blocs compagnon de $(\nabla_{\mathcal{A}})$ de même dimension qu'elle échange alors la relation $Mat(\alpha)_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} = I_n$ prouve que, quelque soit $\mathcal{A}$, tous les blocs compagnon de $(\nabla)_{\mathcal{A}}$ de même dimension sont égaux et simultanément ceux de $(\nabla)_{\mathcal{B}}$. On remarque alors que s'il existe au moins deux blocs compagnon égaux, nécessairement de même dimension, alors P est p.p.c.m. à gauche seulement d'une partie des P_i, polynômes irréductibles associés aux blocs compagnon et dont le degré est précisément la dimension du bloc compagnon, P est donc p.p.c.m. de polynômes irréductibles deux à deux distincts et dont la somme des degrés est strictement plus petite que n ce qui est impossible, d'après le lemme complet d'Euclide; puisque $deg(P) = n$. On a le

Deuxième théorème précisé de factorialité de $K[D]$ au sens des p.p.c.m. à gauche

Soit $P = \sum_{i=0} a_i D^i \in K[D]$ avec $a_n \neq 0$ nous appelons ∇ la connexion dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ de K^n est la matrice compagnon

de dernière colonne $\begin{pmatrix} \frac{a_0}{a_n} \\ \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$.

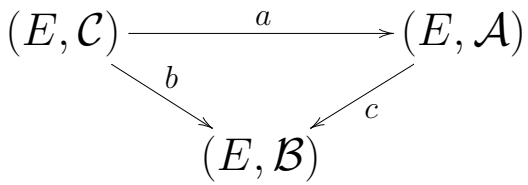
- La décomposition de P en produit de $a_n \in K$ et du p.p.c.m. à gauche de s éléments irréductibles distincts et de degrés distincts $P_1, \ldots, P_s$ de $K[D]$ classés par degrés croissants existe et est unique.

- – Il existe une base $\mathcal{A}$ de K^n telle que $(\nabla)_{\mathcal{A}}$ est une matrice diagonale par blocs et dont la dimension des blocs est strictement croissante par indices croissants.
  – Chaque bloc diagonal D_i est la matrice compagnon dont la dernière colonne est $\begin{pmatrix} p_{i,0} \\ \vdots \\ p_{i,deg(P_i)} \end{pmatrix}$ où

$$P_i = D^{deg(P_i)} - \sum_{j=1}^{deg(P_i)-1} p_{i,j} D^j$$

  – Si $\mathcal{B}$ est une autre base de K^n avec les mêmes propriétés que $\mathcal{A}$ alors on a le shéma

triangulaire

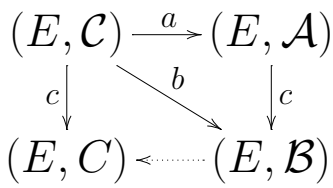


où a, b, c sont les isomorphismes linéaires tels que $\begin{cases} \mathcal{A} &= a(\mathcal{C}) \\ \mathcal{B} &= b(\mathcal{C}) \\ \mathcal{B} &= c(\mathcal{A}) \end{cases}$

– Si C est la base image de $\mathcal{C}$ par c alors

$$\begin{cases} (\nabla)_{\mathcal{A}} &= (\nabla)_{\mathcal{B}} = (\nabla)_{c(\mathcal{A})} \\ (\nabla)_{\mathcal{C}} &= (\nabla)_{C} = (\nabla)_{c(\mathcal{C})} \end{cases}$$

Remarques sur les isomorphismes a, b, c
On a le shéma d'isomorphismes qui suit



Sous la flèche en pointillé l'isomorphisme représenté est à la fois $c \circ a \circ c^{-1}$ et $c \circ b^{-1} = c \circ a^{-1} \circ c^{-1}$ il suit que

$$\boxed{a = a^{-1}}$$

Mais comme $\mathcal{A}$ est «n'importe quelle base» dans laquelle s'applique le deuxième théoréme précisé de factorisation ce résultat vaut pour b donc

$$\boxed{b = b^{-1}}$$

Inversons la flèche en pointillé on obtient le shéma d'isomorphismes qui suit

$$\begin{array}{ccc} (E,\mathcal{C}) & \xrightarrow{a} & (E,\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ (E,C) & \dashrightarrow & (E,\mathcal{B}) \end{array}$$

l'isomorphisme représenté par la flèche en pointillé est $c \circ a$ c'est b et on a alors le shéma d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} (E,\mathcal{C}) & \xrightarrow{a} & (E,\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle c}\downarrow & \searrow^{b} & \downarrow{\scriptstyle c} \\ (E,C) & \underset{b}{\dashrightarrow} & (E,\mathcal{B}) \end{array}$$

qui donne alors $b = b \circ c$ soit $c = Id_E$ et donc

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{B}}$$

et le shéma se simplifie en

$$(E,\mathcal{C}) \overset{a=a^{-1}}{\longrightarrow} (E,\mathcal{A})$$

Remarque sur a : En caractéristique différente de 2 l'égalité $a^2 = Id_E$ se scinde en $(a - Id_E) \circ (a + Id_E) = 0$: l'isomorphisme a est une symétrie affine.

Troisième théorème précisé de factorialité de $K[D]$ au sens des p.p.c.m. à gauche Soit $P = \sum_{i=0} a_i D^i \in K[D]$ avec $a_n \neq 0$ nous appelons ∇ la connexion dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ de K^n est la matrice compagnon de dernière colonne $\begin{pmatrix} \frac{a_0}{a_n} \\ \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$.

- La décomposition de P en produit de $a_n \in K$ et du p.p.c.m. à gauche de s éléments irréductibles distincts et de degrés distincts $P_1, \ldots, P_s$ de $K[D]$ classés par degrés croissants existe et est unique.
- Il existe une base *unique* $\mathcal{A}$ de K^n telle que $(\nabla)_{\mathcal{A}}$ est une matrice diagonale par blocs et dont la dimension des blocs est strictement croissante par indices croissants.
- Chaque bloc diagonal D_i est la matrice compagnon dont la dernière colonne est $\begin{pmatrix} p_{i,0} \\ \vdots \\ p_{i,deg(P_i)} \end{pmatrix}$ où

$$P_i = D^{deg(P_i)} - \sum_{j=1}^{deg(P_i)-1} p_{i,j} D^j$$

- Si a est l'isomorphisme tel que $\mathcal{A} = a(\mathcal{C})$ alors $a^2 = Id_{K^n}$. Si la caractéristique de K (égale à la caractéristique de K_D) est différente de 2 alors a est une symétrie affine vectorielle.

Remarque sur l'isomorphisme a Dans la base $s(e_1), \ldots, s(e_n)$ la connexion ∇ de matrice compagnon associée à l'opérateur $P = \sum_{i=0} a_i D^i \in K[D]$ est diagonale par blocs compagnons C_i de dimension distinctes, c'est à dire $K^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ où $V_1, \ldots, V_s$ est stable minimum. Choisissons sur chaque V_i un vecteur $v_i \neq 0$ alors chaque v_i est cyclique sur V_i d'annulateur le polynôme vectoriel associé à V_i.
Autrement exprimé : dans la base

$$(a(v_1), \ldots, \nabla^{dim(V_1)-1}(a(v_1)), \ldots, a(v_s), \ldots, \nabla^{dim(V_s)-1}(a(v_s)))$$

est diagonale par bloc de mêmes blocs compagnons. Par unicité cette base est la base $(a(e_1), \ldots, a(e_n))$ **c'est à dire que pour tout choix de** $(v_1, \ldots, v_s)$ **dans** $V_1 \times \cdots \times V_s$ **on a l'égalité**

$$a(v_i) = a(e_{1+\sum_{j=1}^{i-1} dim(V_1)})$$

- Si la caractéristique de K est différente de 2 il n'y a pas unicité **du choix dans** K des s-uplets $(a(v_1), \ldots, a(v_s))$. a est bijective; ceci n'est possible que si $s = 1$.

- Si la caractéristique de K est 2 il y a au minimum $\prod_{i=1}^{s}(2^{dim(V_i)}-1)$ **choix dans** K pour les s-uplets $(a(v_1),\ldots;a(v_s))$, ce nombre n'est 1 que si $dim(V_i)=1,\ \forall i$ et comme les dimensions des V_i sont croissantes par indice croissant ceci n'est possible que si $s=1$.

Nous en déduisons le

Théorème : Quelle que soit la caractéristique de tout corps différentiel à une seule variable K, toute connexion linéaire vectorielle ∇ est irréductible, et tout polynôme différentiel **à coefficients sur** K est irréductible.

Preuve

- Soit $P=\sum_{i=0}^{n}a_iD_i\in K[D]$ alors le troisième théorème devient $P=P_1$ irréductible et ∇ la connexion, dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & \ldots & -a_1/a_n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1}/a_n \end{pmatrix}$, est irréductible.

- Soit ∇ une connexion alors il existe un vecteur $z\in K^n$ cyclique pour la connexion. Si $\mathcal{B}$ est la base $(z,\nabla(z),\ldots,\nabla^{n-1}(z))$ alors $(\nabla)_{\mathcal{B}}$ est une matrice compagnon soit

$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix}$ cette matrice. Si ∇ n'était pas irréductible alors il existerait V un espace vectoriel stable pour ∇ minimum qui est de dimension plus petite strictement que n et d'après le troisième théorème précisé de factorisation dans une base $\mathcal{B}'$ la matrice de ∇, $(\nabla)_{\mathcal{B}'}$, serait compagnon par blocs avec au moins deux blocs distincts ce qui est contradictoire avec le fait qu'il ne peut y avoir deux blocs distincts.

Définition et théorème : $P \in K[D]\backslash\{0\}$ sera dit premier à gauche par les p.p.c.m. si et seulement si $\forall P_1,\ P_2 \in K[D]\backslash\{0\}$ $P|_g(P_1 \wedge_g P_2) \Rightarrow (P|_g P_1) \wedge (P|_g P_2)$.
$P \in K[D]$ est premier à gauche par les p.p.c.m. si et seulement si il est non nul.

Preuve : Soit $P \in K[D]\backslash\{0\}$ de coefficient de plus haut degré $a \in K\backslash\{0\}$ alors P/a est irréductible unitaire. Soit $P \in K[D]\backslash\{0\}$ de coefficient de plus haut degré a alors P/a est irréductible unitaire. Si P divise à gauche $P_1 \wedge_g P_2 = P_1/a_1 \wedge_g P_2/a_2$ où $a_1,\ a_2$ sont les coefficients de plus haut degrés de $P_1,\ P_2$. Par application du lemme d'Euclide $P/a = P_1/a_1$ ou

$P/a = P_2/a_2$ soit P divise à gauche P_1 ou P_2, P est premier à gauche par les p.p.c.m. Réciproquement si P est premier à gauche par les p.p.c.m. alors il est non nul par définition.

Premier lemme de Gauss : Si P non nul divise à gauche $P_1 \wedge_g P_2$, avec $P_1 \neq 0$ et $P_2 \neq 0$, alors il est associé à P_1 ou P_2.

Preuve : $P \neq 0$ est premier à gauche par les p.p.c.m, s'il divise à gauche $P_1 \wedge_g P_2$, avec $P_1 \neq 0$ et $P_2 \neq 0$, alors P divise à gauche P_1 ou P_2 et comme $P,\ P_1,\ P_2$ sont irréductibles ceci équivaut à P est associé à P_1 ou P_2.

Deuxième lemme de Gauss : Si P non nul divise à gauche $P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s$ alors il est associé à l'un des P_i $(i \in [1, s] \cap \mathbb{N})$.

Preuve : Par récurrence sur s. Ce lemme est vrai pour $s = 1,\ 2$, supposons que pour la valeur $s \geq 2$ P premier à gauche divise à gauche $P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s \Rightarrow P$ divise à gauche l'un des P_i et que P divise à gauche $P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_{s+1}$ alors P divise à gauche $(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s) \wedge_g P_{s+1}$ donc

$$P \textit{ divise à gauche } (P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s) \textit{ ou}$$
$$P \textit{ divise à gauche } P_{s+1}$$

Nous appliquons l'hypothèse de récurrence P divise à gauche l'un des P_i $(i \in [1, s] \cap \mathbb{N})$ **ou** P divise à gauche P_{s+1} soit P divise à gauche l'un des P_i

$(i \in [1, s+1] \cap \mathbb{N})$ et comme tous ces polynômes sont irréductibles : P est associé à l'un des P_i. C.Q.F.D.!
Comme tout $P \neq 0$ dans $K[D]$ est irréductible on peut énoncer le
Théorème :

$$\forall P_1, \ \ldots, \ P_s \in K[D]\backslash\{0\}$$

$$P_1 \vee_g \cdots \vee_g P_s = 1$$

Corollaire des degrés :

$$\forall P_1, \ \ldots, \ P_s \in K[D]\backslash\{0\}$$

$$deg(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s) = \sum_{i=1}^{n} deg(P_i)$$

Extensions algèbro-différentielles du corps K

Dans un corps K, par exemple si $K = \mathbb{Q}(x), \mathbb{R}(x), \mathbb{C}(x)$ les polynômes de $K[X]$, n'ont pas nécessairement de racines dans K et il est nécessaire pour définir les racines d'un polynôme P à coefficient sur K de faire des calculs non pas dans K, mais dans un corps L qui contienne K : c'est l'objet d'une théorie féconde appelée théorie de Galois que nous n'aborderons pas mais nous retiendrons qu'il est

possible de construire et bien définir un tel corps L. Dans un corps L qui contienne K et les racines de P nous souhaitons pouvoir définir étendre D en une dérivation, que nous appelons encore D **stable sur** K afin de bien définir l'anneau $L[D]$ c'est l'objet d'une deuxième théorie appelée théorie de Galois algèbro-différentielle et que nous détaillons dans ce qui suit.

Définition du groupe de Galois algèbro-différentiel d'une extension algèbro-différentielle L de K

Définition : Soit $(K, +, \times, D)$ un corps muni d'une dérivation interne on note aussi $(L, +, \times, D)$, $+$ **et** $\times$ **les opérations de** L bien qu'elles ne soient pas les opérations de K, un corps, **s'il existe**, que nous appelons une extension algèbro-différentielle de K si

- $K \subset L$.
- Il existe au moins un automorphisme de corps $\sigma : L \to L$ tel que $\sigma_{|K} = Id_K$ et $D \circ \sigma = \sigma \circ D$

Si un tel automorphisme existe alors les opérations de corps sur K se prolongent sur L ainsi que la dérivation sur K. Pour le voir on compose par σ bijectif qui laisse K invariant les axiomes de corps et de dérivation pour L. On a la

Propriété : Si l'ensemble noté $Gal(L/K, D)$ des automorphismes du corps L qui commutent avec D et laissent K invariant n'est pas vide alors cet ensemble est un groupe pour la composition des automorphismes appelé le groupe de Galois algèbro-différentiel de L sur K.

Preuve :

- Si $\sigma_1, \ \sigma_2 \in Gal(L/K, D)$ alors $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est encore un automorphisme du corps L laissant

K invariant et de plus

$$D \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ D \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ D$$

- Si $\sigma \in Gal(L/K, D)$ alors σ^{-1} est encore un automorphisme du corps L laissant K invariant et de plus

$$\begin{array}{ll} D \circ \sigma & = \sigma \circ D \\ & \Downarrow \\ \sigma^{-1} \circ D \circ \sigma \circ \sigma^{-1} & = \sigma^{-1} \circ \sigma \circ D \circ \sigma^{-1} \\ & \Downarrow \\ \sigma^{-1} \circ D & = D \circ \sigma^{-1} \\ & \Downarrow \\ D \circ \sigma^{-1} & = \sigma^{-1} \circ D \end{array}$$

- Id_L est un automorphisme de L laissant K invariant puisque c'est $\sigma^{-1} \circ \sigma$ pour n'importe quel automorphisme de L laissant K invariant.

Nota : la notion d'extension algèbro-différentielle est à double sens puisqu'un corps peut posséder des sous-corps, et en particulier son corps des constantes, par conséquent, $Gal(K/K_D, D)$, **le groupe de Galois d'un corps différentiel sur ses constantes est bien défini puisque le corps des constantes existe toujours mais les théorèmes d'irréductiblité de connexions et polynômes étant démontrés pour des dérivations non nulles ne s'appli-**

quent pas pour des connexions et polynômes différentiels à valeur sur K_D.