Quelques notions utiles sur les groupes et les nombres réels classiques

Alain Wazner,...

Rappels de théorie des groupes

lemme : Si N et H sont deux sous-groupes et si H est un sous-groupe distingué de G alors $NH = \{nh/n \in N,\ h \in H\} = HN$ et c'est un sous-groupe de G dont H est un sous-groupe distingué.
Preuve : Si $n \in N$, $h \in H$ alors $nh = nhn^{-1}n$ est le produit de $nhn^{-1} \in H$ par $n \in N$ et donc $HN \supset NH$.
$hn = hnh^{-1}h$ est le produit de $hnh^{-1} \in N$ par $h \in H$ et donc $NH \supset HN$.
Le neutre e de G est aussi celui de H et de N et la relation $e = ee$ entraîne que $e \in NH$.
Soient à présent $n' \in N$, $h' \in H$ alors $hnh'n' = hnh'n^{-1}nn'$ est le produit de $h \in H$ par $nh'n^{-1} \in H$ et par $nn' \in N$: il appartient donc à HN.
L'inverse de hn est $n^{-1}h^{-1} = n^{-1}h^{-1}nn^{-1}$ c'est le produit de $n^{-1}h^{-1}n \in H$ par $n^{-1} \in N$: il appartient donc à HN.
HN est alors un sous-groupe de G car contenant son neutre et étant stable pour l'opération de groupe et par inversion de ses éléments. H est distingué dans G, donc si $h \in H$ et $g \in G$ alors $g^{-1}hg \in H$; cette inclusion est à fortiori vraie pour $g \in NH \subset G$: H est donc distingué dans NH.

Sur les corps commutatifs totalement ordonnés vérifiant la propriété de la borne supérieure

Complétion

Tout corps $\mathbb{K}$ totalement ordonné et possédant la propriété de la borne supérieure est complet.
Preuve :

Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy est bornée : Choisissons $\varepsilon > 0 \in \mathbb{K}$ alors, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $(q > p > N) \Rightarrow |u_q - u_p| < \varepsilon$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bornée par $M = Max_{\{i\leq N\}}(|u_i|) + \varepsilon$.
Selon la **propriété de la borne supérieure** la partie U de $\mathbb{K}$ égale à l'ensemble des valeurs prises par la suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une borne supérieure u_+, elle admet aussi une borne inférieure $u_- \leq u_+$: puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée**, on peut appliquer la propriété de la borne supérieure à la suite de Cauchy $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ les partie A_n de $\mathbb{K}$ définies par $\{u_p/p \geq n\}$ sont majorées par u_+, minorées par u_-, et décroissantes par inclusion, par la propriété de la borne supérieure les suites $S_n = Sup_{p\in A_n}(u_p)$ et $I_n = Inf_{p\in A_n}(u_p)$ sont bien définies et de plus $u_- \leq I_n \leq S_n \leq u_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$ par définition des bornes inférieures et supérieures. De plus comme les parties A_n sont décroissantes par inclusion, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Une suite croissante et majorée converge vers la borne supérieure de ses valeurs : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite, nous posons $u = Sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N + \varepsilon > u$ et pour tout $n > N$ on a par propriété de croissance et de la borne supérieure $u_N < u_n < u$. Sachant que $u_N + \varepsilon > u$ ceci entraîne que $|u - u_n| = u - u_n < u - u_N < \varepsilon$ soit $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente comme suite croissante majorée, son opposée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la borne inférieure de ses valeurs.
Nous en déduisons qu'il existe $i \leq s$ tels que $i = lim_{n\to\infty} I_n$ et $s = lim_{n\to\infty} S_n$.

Soit $\varepsilon > 0$ alors du fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $p > q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$ de $||u_p| - |u_q|| \leq |u_p - u_q|$ il suit que $||u_p| - |u_q|| < \varepsilon$. Dans l'assertion qui précède on peut choisir tous les p tels que $p \geq N+1$ et tous les q tels que $q \geq N+2$ et par passage aux bornes inférieures et supérieures $|S_{N+1} - I_{N+2}| \leq \varepsilon$. Nous faisons à présent tendre N vers $+\infty$ il suit que $\forall\varepsilon > 0$ $0 \leq |s - i| \leq \varepsilon$. Cette assertion est équivalente à l'assertion **la borne supérieure de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = |s - i|$ est 0 et comme la borne supérieure de cette suite est 0 ceci entraîne que $s = i$.**
Nous terminons la preuve en remarquant que le théorème du gendarme s'applique à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisqu'on a l'assertion $(\forall n \in \mathbb{N})$, $I_n \leq u_n \leq S_n$ avec

$$s = lim_{n\to\infty}S_n = lim_{n\to\infty}I_n = i$$

Valeurs intermédiaires

Si $\mathbb{K}$ est un corps totalement ordonné et possédant la propriété de la borne supérieure alors le théorème des valeurs intermédiaires s'applique, c'est à dire : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une application continue, alors pour tout u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.
Preuve : Supposons par exemple $f(a) \leq u \leq f(b)$, et notons X le sous-ensemble de l'intervalle $[a,b]$ constitué des $x \in \mathbb{K}$ qui vérifient $f(x) \leq u$. Cet ensemble est non vide (il contient a) et majoré (par b).
Notons c sa borne supérieure et prouvons que $f(c) = u$.

Comme c est une limite d'éléments de X, on a (par passage à la limite dans les inégalités) $f(c) \leq u$.
Il reste à prouver que $f(c) \geq u$.
Si $c = b$, c'est vrai par hypothèse.
Si au contraire l'intervalle $]c, b]$ est non vide, comme ses éléments x vérifient tous $f(x) > u$, on obtient (à nouveau par passage à la limite) $f(c) \geq u$.
Cette inégalité et la précédente prouvent l'égalité voulue.

Propriété d'Archimède

Tout corps $\mathbb{K}$ totalement ordonné et possédant la propriété de la borne supérieure est archimédien : Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $0 < a < b$ considérons $E = \{na/n \in \mathbb{N}\}$, si la partie E est majorée alors elle admet une borne supérieure S. Soit l'intervalle $I =]S - a, S[$ alors $I \cap E \neq \emptyset$ car dans le cas contraire $S - a$ est un majorant de E plus petit que S qui n'est pas alors une borne supérieure, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $na \in I$ alors par définition de I on a $(n+1)a > S$ et S n'est pas la borne supérieure de E. E n'est donc pas bornée et $\forall b > a,\ \exists n \in \mathbb{N}/na > b$.

Sous-groupes additifs

Si G est un sous-groupe additif propre de $\mathbb{K}$, et si G n'est pas $\{0\}$ alors on peut trouver $x \in G$ avec $x \neq 0$, la partie de $\mathbb{K} \supset G^+ = \{g \in G/g > 0\}$ n'est pas vide puisque x ou $-x$ appartiennent à G^+, G^+ est donc minorée par 0 et admet alors une borne inférieure $a \geq 0$.

- Si $a = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{K}$. En effet : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in G/0 < c < \varepsilon$. $\mathbb{K}$ est archimédien :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \exists n \in \mathbb{N}/nc < \alpha < (n+1)c$$

et donc $|\alpha - nc| < \varepsilon$ comme $nc = \underbrace{c + \cdots + c}_{n} cn \in G$ tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ peut être approché à ε près par un élément de G qui est alors dense dans $\mathbb{K}$.

- Si $a > 0$ alors $a \in G^+$ car dans le cas contraire tout voisinage $V(a)$ de a contient des éléments de G^+ différents de a, il n'en contient pas un nombre fini car dans le cas contraire le minimum de ces éléments est la borne supérieure de G^+ et elle est plus grande que a, soit à présent $\varepsilon > 0$ alors l'intervalle $]a, a+\varepsilon[$ contient au moins deux éléments distincts de G^+ et dont la différence positive toujours dans G^+ est plus petite que ε. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on a alors $a = 0$ ce qui est contradictoire. Soit à présent $g \in G$ alors comme $\mathbb{K}$ est archimédien $\exists n \in \mathbb{Z}$ avec $0 \leq r < a$ tel que $na \leq g < (n+1)a$ on a donc $0 \leq g - na < a$ et comme a est la borne inférieure de G^+ ceci entraîne que $g = na$. Inversement tout na avec $n \in G$ est dans G : on a donc
$$G = \{na/n \in \mathbb{Z}\} =< a >$$
.

De l'existence d'une base sur tout espace vectoriel comme conséquence du lemme de Zorn (lui-même équivalent à l'axiome de choix).

Ce résultat est un classique de la théorie des espaces vectoriels et peut être omis en première lecture.
Soit K un corps, E un K-espace vectoriel, non réduit à $\{0\}$, nous ordonnons l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E par l'inclusion, nous considérons $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties libres de E.

$\mathcal{L}$ n'est pas vide car il contient au moins un singleton $\{x\}$ avec $x \neq 0$.
Si $\mathcal{C}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{L}$ alors $\mathcal{M} = \cup_{c\in\mathcal{C}} c$ est un majorant de $\mathcal{C}$, c'est aussi une partie libre de E :
En effet, si $\sum_{i=1}^{n} k_i e_i = 0$ avec $k_i \in K$ et $e_i \in \mathcal{M} = \cup_{c\in\mathcal{C}} c$ alors,
$(\forall i \in \{1,..,n\})(\exists c_i \in \mathcal{C}) e_i \in c_i$: les e_i sont des items d'au plus n parties libres c_i distinctes de $\mathcal{C}$, comme ces n parties sont totalement ordonnées par inclusion, la famille $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ admet un plus grand élément c^* dans $\mathcal{C}$: autrement dit $\sum_{i=1}^{n} k_i e_i$ est une combinaison linéaire nulle sur la partie libre c^*, ce qui entraîne que $k_i = 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$.
Ceci étant vrai pour toute combinaison linéaire sur $\mathcal{M}$, il suit que $\mathcal{M}$ **est une partie libre de** E.
$\mathcal{L}$ est donc une partie non vide et inductive de E et, par application du lemme de Zorn, il existe un élément $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ qui est maximal pour l'ordre de l'inclusion.
$\mathcal{B}$ est une base de E : Soit $x \in E$, si x est un vecteur de $\mathcal{B}$ il est égal à $1.x$ et c'est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$.
Si $x \notin \mathcal{B}$ alors la partie $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{x\}$ n'est pas libre car si elle l'était $\mathcal{B}$ ne serait pas une partie libre maximale. Il existe alors une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de vecteurs de $\mathcal{B}'$, et le coefficient de x, item de $\mathcal{B}'$ n'est pas 0 car alors il existerait une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de vecteurs de la partie libre $\mathcal{B}$. Si $\lambda x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ avec $\lambda \neq 0,\ e_i \in \mathcal{B}$ était cette combinaison linéaire alors $x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} e_i$ serait combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$.
On a prouvé que $\mathcal{B}$ est une partie

génératrice de E et, comme c'est déjà une partie libre : c'est une base de E.