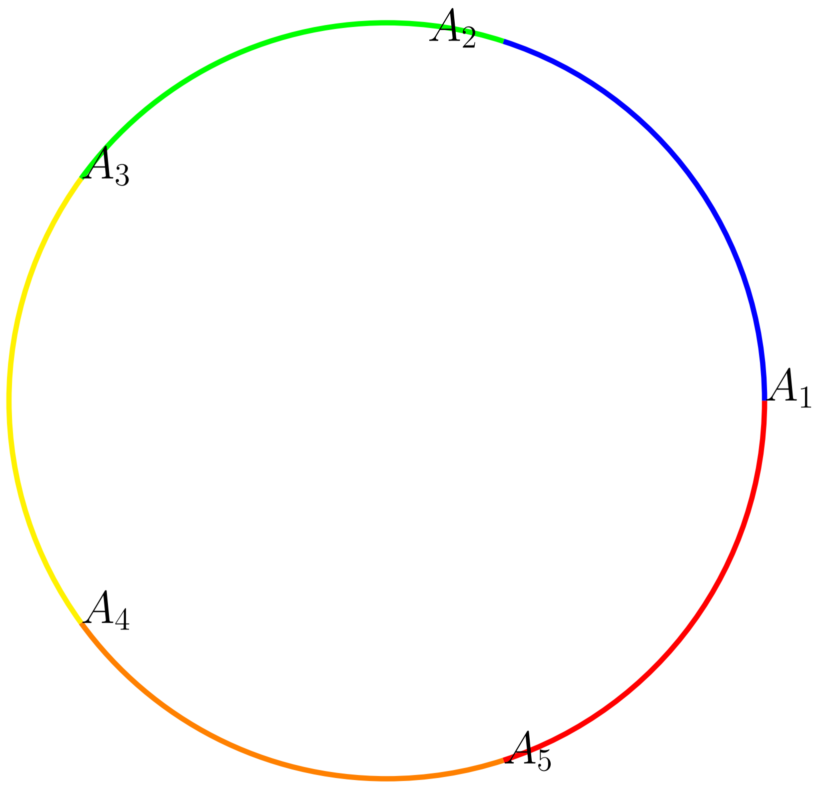
Comment se rendre à pied dans une caverne

Bachelard **I**onslume, **A**lain **W**azner

0.1 Des amis, un gâteau.

Des convives sont assis à une table circulaire en face de leurs assiettes à dessert, chaque assiette est d'une couleur distincte codée par un nombre entier compris entre 1 et 5.

Sur la figure à la page suivante : les assiettes sont notés de A_1 à A_5; A_i a pour couleur i.

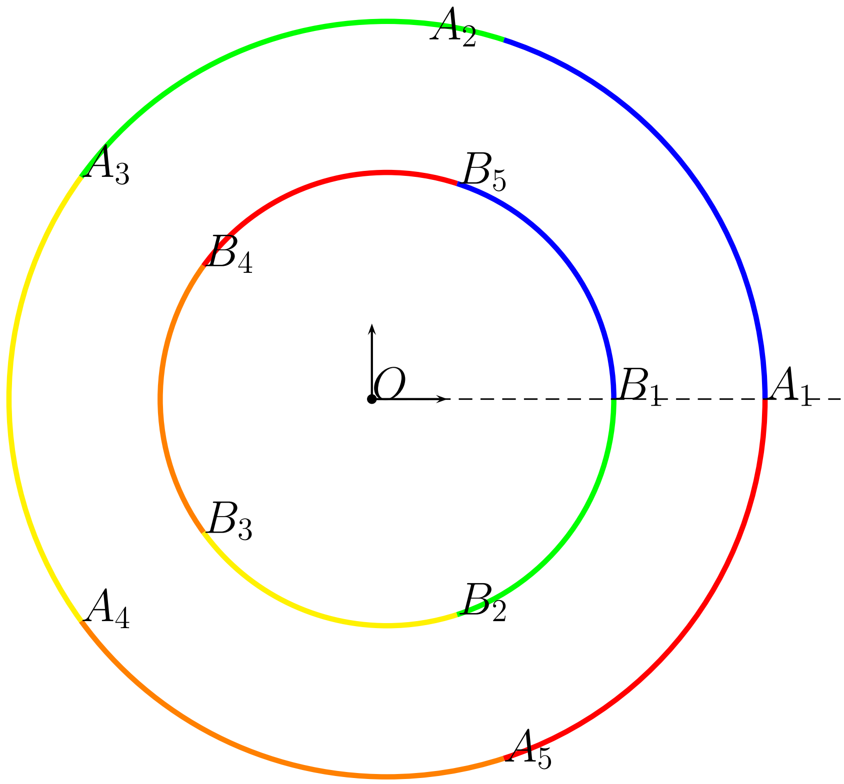


Sur la table est disposé un plateau circulaire et

tournant sur lequel est posé un gâteau.
Sur le gâteau sont posées des bougies :

- Il y en a autant que de convives.
- Chaque bougie est de couleur distincte.
- L'ensemble des couleurs des assiettes est l'ensemble des couleurs des bougies.
- Une seule des assiettes est en face d'une bougie de même couleur.

Sur la figure à la page suivante : les bougies sont notés de B_1 à B_5; B_i a pour couleur i.
On a donc $A_i \leftrightsquigarrow B_i$ pour un seul $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ où $A_i \leftrightsquigarrow B_i$ signifiera «l'assiette de couleur i fait face à la bougie de couleur i».



Exemple : sur la figure $A_1 \leftrightsquigarrow B_1$ est la seule relation de face à face entre assiettes et bougies de mêmes couleurs.

- Le convive dont l'assiette est de même couleur que la bougie qui lui fait face, souffle la bougie et prend la part de gâteau correspondante,
- on tourne le gâteau dans le sens inverse des aiguilles d'une montre d'une fraction de tour : de sorte que les convives ont à présent en face de leurs assiettes les bougies qui étaient à leur

gauche.

- Ceux dont l'assiette est de même couleur que la bougie lui faisant face soufflent cette bougie et prennent la part de gâteau contenue dans leur assiette.

Existe-t-il une répartition initiale des bougies de façon à ce que pour chaque fraction de tour une et une seule bougie soit soufflée par un convive distinct? (*si une telle répartition est possible, il faudra* $\dfrac{n-1}{n}$ *tour de gâteau pour servir à tour de rôle les convives*).

0.2 La modélisation par l'utilisation de groupes.

Où interviennent les groupes des rotations du plan et celui des permutations d'un ensemble.

Un modèle géométrique de la répartition des convives et des bougies.

Bien qu'il arrive rarement que des convives réunis autour d'une table circulaire, se répartissent à égale distance les uns des autres, il est commode, pour établir un modèle géométrique, de supposer qu'ils occupent les sommets d'un polygone régulier, et qu'il en soit de même des bougies du gâteau.
Puisque le codage des couleurs est le fruit d'un arbitraire, nous avons la liberté de choisir des nombres entiers consécutifs en parcourant le polygone

des convives dans le sens trigonométrique.
Si le nombre de ceux-ci est n, alors il est dans la généralité commune aux convives aux bougies et au gâteau, que toute demi-droite issues du centre commun du plateau, du gâteau et de la table et qui passe par une bougie, passe aussi par un convive.
La mesure principale de l'angle orienté entre deux telles demi-droites distinctes est alors en radians, le produit d'un entier relatif non nul compris entre 0 et $n-1$ par le réel $\frac{2\times\pi}{n}$.

Le modèle correspondant par action du groupe des permutations sur des sommets de polygones réguliers.

Dans la position initiale des bougies et des convives

- Tout convive dont l'assiette -notée A_i- a pour couleur notée i est en face d'une seule bougie (notée B_j) de couleur notée j.
- Pour toute bougie -notée B_j- de couleur notée j, il existe face à B_j un et un seul convive dont l'assiette -notée A_i- a pour couleur notée i.

S'étant donné un repère orthonormé direct d'origine O, le centre commun du gâteau et de la table, de premier vecteur unitaire, celui de la de la demi-droite $[O, A_1)$, les sommets du polygone régulier $(A_1, \ldots, A_n)$ sont «parcourus dans le sens trigonométrique par indice croissant»: c'est à dire que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_i}}\right)$ a pour mesure principale $\frac{2\times(i-1)\times\pi}{n}$ (voir figure précédente) et chaque A_i est en regard d'un $B_{\sigma(i)}$ où $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est «la permutation initiale» des couleurs : c'est à dire que pour tout i, $A_i \leftrightsquigarrow B_\sigma(i)$; ce qui revient à écrire $\forall i,\ A_{\sigma^{-1}(i)} \leftrightsquigarrow B_i$.

Nous **définissons** $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ $\sigma.\,(B_1, \ldots, B_n)$ par $\big(B_{\sigma(1)}, \ldots, B_{\sigma(n)}\big)$ et $\tau.\,(A_1, \ldots, A_n)$ par $\big(A_{\tau(1)}, \ldots, A_{\tau(n)}\big)$, alors par application de cette définition découlent les propriétés :

- $Id.\,(B_1, \ldots, B_n) = (B_1, \ldots, B_n)$
- $Id.\,(A_1, \ldots, A_n) = (A_1, \ldots, A_n)$
- $\tau.\,(\sigma.\,(B_1, \ldots, B_n)) = (\tau \circ \sigma).\,(B_1, \ldots, B_n)$, $\forall \tau, \sigma \in \mathcal{S}_n$
- $\tau.\,(\sigma.\,(A_1, \ldots, A_n)) = (\tau \circ \sigma).\,(A_1, \ldots, A_n)$, $\forall \tau, \sigma \in \mathcal{S}_n$

Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ **nous écrivons**

$$(A_1, \ldots, A_n) \leftrightsquigarrow \sigma.\,(B_1, \ldots, B_n)$$

si et seulement si $\forall i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ $A_i \leftrightsquigarrow B_{\sigma(i)}$.
On a la propriété :
$(A_1, \ldots, A_n) \leftrightsquigarrow \sigma.\,(B_1, \ldots, B_n)$ si et seulement si $\sigma^{-1}.\,(A_1, \ldots, A_n) \leftrightsquigarrow (B_1, \ldots, B_n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ alors le n-uple $\left(B_1^k, \ldots, B_n^k\right)$ est défini comme le n-uple des bougies qui font face aux assiettes $(A_1, \ldots, A_n)$ après $\dfrac{k}{n}$ tours du gâteau : c.a.d. qu'après $\dfrac{k}{n}$ tours du gâteau $(A_1, \ldots, A_n) \leftrightsquigarrow \left(B_1^k, \ldots, B_n^k\right)$
Nous pouvons alors écrire que :

- $\exists \sigma \in \mathcal{S}_n / \left(B_1^0, \ldots, B_n^0\right) = \sigma.\left(B_1, \ldots, B_n\right)$ et $(A_1, \ldots, A_n) \leftrightsquigarrow \left(B_1^0, \ldots, B_n^0\right)$: σ est la permutation initiale des couleurs des bougies en face des assiettes.

- $\forall k \in \mathbb{N}$, si $(A_1, \ldots, A_n) \leftrightsquigarrow \left(B_1^k, \ldots, B_n^k\right)$ alors après que le gâteau ai tourné d'un angle de $\frac{2\times\pi}{n}$: $\left(B_n^k, B_1^k, \ldots, B_{n-1}^k\right)$ fait face à $(A_1, \ldots, A_n)$ lequel, **par définition**, fait face à $\left(B_1^{k+1}, \ldots, B_n^{k+1}\right)$. Ceci donne la relation

$$\left(B_1^{k+1}, \ldots, B_n^{k+1}\right) = \mathcal{C}.\left(B_1^k, \ldots, B_n^k\right)$$

où $\mathcal{C}$ est le cycle $(n, n-1, \ldots, 1)$ et, par récurrence, $\exists \sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que :

$$\left(B_1^{k+1}, \ldots, B_n^{k+1}\right) = \left(\mathcal{C}^n \circ \sigma\right).\left(B_1, \ldots, B_n\right)$$

où

$$(A_1, \ldots, A_n) \leftrightsquigarrow \left(B_1^0, \ldots, B_n^0\right) = \sigma\left(B_1, \ldots, B_n\right)$$

Pour finir la modélisation, il faut exprimer les contraintes de coïncidence des couleurs des bougies et des assiettes.

Si $i \in [1,n]_{\mathbb{N}}$ alors nous appelons $\mathcal{S}_n(i)$ le groupe $\{\sigma \in \mathcal{S}_n/\sigma(i) = i\}$ (c'est le **stabilisateur** de i pour l'action de groupe **à gauche** : $\sigma.i = \sigma(i)$). $\mathcal{S}_n(i)$ est de plus isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$: si f est une bijection de $[1, n-1]_{\mathbb{N}}$ vers $[1,n]_{\mathbb{N}}\backslash\{i\}$ alors l'application $\Psi_f(\sigma)$: $\begin{cases} j \neq i \mapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}(j) \\ i \mapsto i \end{cases}$
appartient à $\mathcal{S}_n(i)$ et Ψ_f : $\begin{cases} \mathcal{S}_{n-1} \to \mathcal{S}_n(i) \\ \sigma \mapsto \Psi_f(\sigma) \end{cases}$ est un isomorphisme de groupe.
Effet des conjugaisons :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, s \in \mathcal{S}_n(i) \ : \ \sigma^{-1} \circ s \circ \sigma \in \mathcal{S}_n\left(\sigma^{-1}(i)\right)$$

Preuve : $\sigma^{-1}\circ s\circ\sigma(\sigma^{-1}(i)) = \sigma^{-1}\circ s(i) = \sigma^{-1}(i)$
Expression nécessaire et suffisante de la condition d'unicité cyclique de face à face
Si on appelle σ la permutation initiale du face à face cette condition est :

$$\exists \sigma, s \in \mathcal{S}_n/\forall k \in [1,n]_{\mathbb{N}},\ \mathcal{C}^k \circ \sigma \in \mathcal{S}_n(s(k))$$

où s est un cycle d'ordre n (en effet à chaque valeur de k, la couleur du face à face change)

Où la parité des convives ne peut pas être.

En $k = n$ la condition d'unicité cyclique est $\sigma \in \mathcal{S}_n(s(n))$ soit $\sigma\left(s(n)\right) = s(n)$.

En $k \neq n$ cette condition devient $\mathcal{C}^k \circ \sigma \in \mathcal{S}_n(s(k))$ soit $\mathcal{C}^k(\sigma(s(k))) = s(k)$ soit $\sigma(s(k)) - k \equiv s(k) \; (mod\, n)$ puis $\sigma(s(k)) \equiv s(k) + k \; (mod\ n)$. Cette dernière relation est vraie aussi pour $k = n$ on a donc

$$\forall k \in [1, n]_{\mathbb{N}} \; \sigma(s(k)) \equiv s(k) + k \; (mod\ n)$$

En sommant ces relations il vient

$$(E) \; \sum_{i=1}^{n} \sigma(s(k)) \equiv \sum_{i=1}^{n} (s(k) + k) \;\; (mod\ n)$$

Comme $\sigma \circ s$ et s sont des permutations de $[1, n]_{\mathbb{N}}$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(s(k)) = \sum_{i=1}^{n} s(k) = \sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

et E devient $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \; (mod\ n)$. Pour que les contraintes soient respectées n doit diviser l'entier $\frac{n(n+1)}{2}$. Supposons que n **soit pair** alors **l'entier** $\frac{n(n+1)}{2}$ est le **produit des entiers** $\frac{n}{2}$ **et** $n + 1$, n divise ce produit et est premier avec $n + 1$: il divise donc $\frac{n}{2}$; ce qui est impossible puisque $\frac{n}{2} < n$.