Notions de déterminant

Alain Wazner. Pour Hélène, Léo et Corentin

formes n-linéaires

Introduction

L'approche systèmique

Considérons un système linéaire à deux équations et deux inconnues sur un corps commutatif K, soit

$$(S)\ :\ \begin{cases} (1) & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ (2) & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \end{cases}$$

- Si $a_{1,1} \neq 0$ alors substituons à l'égalité (2) l'égalité $a_{1,1} \times (2) - a_{2,1} \times (1)$ on obtient alors le système équivallent

  $$(S') : \begin{cases} (1) & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ (2') & (a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{2,1} \times a_{1,2})\, x_2 = b'_2 \end{cases}$$

  - Si $a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{2,1} \times a_{1,2} \neq 0$ alors l'équation $(2')$ est une équation du premier degré dont le coefficient directeur n'est pas nul : elle admet une seule solution en x_2. Nous substituons à x_2 dans l'équation (1), la valeur solution de $(2')$, (1) devient alors l'équation $(1')$ du premier degré de seule inconnue x_1 dont le coefficient en x_1 est $a_{1,1} \neq 0$. $(1')$

admet alors une solution unique en x_1. **Le couple (x_1^*, x_2^*) obtenu est alors l'unique solution de (S) puisque on a les équivallences :**

$$(S)\ :\ \begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Longleftrightarrow (S')\ :\ \begin{cases}(1)\\(2')\end{cases} \Longleftrightarrow (S'')\ :\ \begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}$$

- Si $a_{1,1}\times a_{2,2}-a_{2,1}\times a_{1,2}=0$ alors l'équation $(2')$ est l'équation $0\times x_2=b'_2$.
  - Si $b'_2\neq 0$ cette équation n'a pas de solution et comme toute solution de $(S)\ :\ \begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$ est solution de $(S')\ :\ \begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}$ sans solution, (S) **n'a pas de solution!**
  - Si $b'_2=0$ alors on a les **équivallences** :

    $$(S)\ :\ \begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Longleftrightarrow (S')\ :\ \begin{cases}(1)\\(2')\ :\ 0=0\end{cases} \Longleftrightarrow (1)$$

    (1) est l'équation $a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2=b_1$ et ses couples de solutions ne sont pas uniques. En effet, si $a_{1,2}\neq 0$ alors $(a_{1,1}^{-1}\times b_1, 0)$ et $(0, a_{1,2}^{-1}\times b_1)$ sont deux couples de solutions, et si $a_{1,2}=0$ alors $(a_{1,1}^{-1}\times b_1, 0)$ et $(a_{1,1}^{-1}\times b_1, 1)$ sont deux couples de solutions.

- Si $a_{1,1}=0$ alors (S) est $\begin{cases}(1) & a_{1,2}x_2 & = & b_1\\(2) & a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2 & = & b_2\end{cases}$,

substituons à l'égalité (2) l'égalité $a_{1,2} \times (2) - a_{2,2} \times (1)$ nous obtenons alors (S')
$$\begin{cases} (1) \ a_{1,2}x_2 & = & b_1 \\ (2') \ \ (a_{1,2} \times a_{2,1})\, x_1 & = & b'_2 \end{cases}$$

- Si $a_{1,2} \times a_{2,1} \neq 0$ (ce qui équivaut alors à $a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{2,1} \times a_{1,2} \neq 0$) alors
$$(S)\ :\ \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Longleftrightarrow (S')\ :\ \begin{cases} (1) \\ (2') \end{cases}$$
(1) et $(2')$ étant deux équations du premier degré, d'inconnues x_1 et x_2 et de coefficients dominants non nuls, elles admettent toutes deux une solution unique x_1^* et x_2^* : (x_1^*, x_2^*) est alors l'unique couple solution du système (S); Sinon
  - Si $a_{1,2} = 0$ alors (1) est l'équation $0 = b_1$. Si $b_1 \neq 0$ alors (1) n'a pas de solution et donc (S) non plus. Si $b_1 = 0$ alors (S) **équivaut à** (2) $a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2$ dont, d'après ce qui précède, l'ensemble -pouvant être vide- des solutions n'est pas un singleton.
  - Si $a_{2,1} = 0$ alors (S) est le système d'équations $\begin{cases} (1) \ a_{1,2}x_2 & = & b_1 \\ (2) \ a_{2,2}x_2 & = & b_2 \end{cases}$ où (1) et (2) sont des équations du premier degré en la seule variable x_2 dont l'ensemble

des solutions est pour chacune d'entre elle $\emptyset$, K ou une valeur fixée x_2^*. Suivant l'existence et la valeur des solutions en x_2 de (1) et (2), (S) est **soit inconsistant et donc sans solution, soit sans solution unique puisque le couple (x_1, x_2^*), où x_1 est n'importe quel élément de K et x_2^* la solution commune à (1) et (2) est solution de (S)!**

Synthétisons cette introduction : Pour un système linéaire à deux inconnues x_1 et x_2 et deux équations **dont on a ordonné l'écriture des variables** l'existence et l'unicité d'un couple solution **ne dépend que de la nullité d'une quantité elle-même dépendante seulement des coefficients de ses variables tels qu'ils apparaissent dans l'écriture des deux équations**. Nous appelons cette quantité **le déterminant** du système (à deux équations et deux inconnues) : il dépend *à priori* de son écriture.

L'approche par isomorphisme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie

Bases-suites, applications linéaires et leurs matrices sur un espace vectoriel de dimension finie Nos expériences géométriques

et sensibles du monde tel qu'il nous apparaît et nos questionnements comme par exemple :
-Pourquoi la psychée inverse-elle la gauche et la droite mais pas le haut et le bas?
-Pourquoi le temps s'écoule-t-il et pas l'espace?
tiennent essentiellement dans une définition ordonnée de la notion de base.
Le physicien ou l'astronome, par exemple lors de représentations de mouvements de particules (l'astronome modélisant les mouvements d'un système planétaire peut en première approximation assimiler les planètes à des points matériels soumis à des forces centrales) est amené à considérer des coordonnés (**inconnues**) de natures différentes ainsi : position, vecteur vitesse, temps, il lui est alors important, lors de la résolution d'équations ou d'un **système discrétisé** de ne pas ajouter des vitesses et des accélérations ou une position et un temps. Le pendant géométrique en dimension finie de ces considérations physiques est qu'il est adéquat de ne pas concevoir une base d'un K-espace vectoriel V comme une **partie** libre et génératrice mais comme une **suite finie d'éléments de V distincts dont l'ensemble des valeurs est une partie libre et génératrice**. Ainsi sur K^2 $(1,0)$, $(0,1)$ et $(0,1)$, $(1,0)$ seront deux bases distinctes alors que

l'ensemble de leurs valeurs leur est commun : c'est l'ensemble $\{(1,0),(0,1)\}$.
Nous définissons alors une application linéaire d'un K-espace vectoriel V sur un K-espace vectoriel W comme une application f telle que

$$f(u+\lambda.v) = f(u) + \lambda.f(v),\ \forall u,v \in V, \lambda \in K$$

un endomorphisme une application linéaire d'un K espace vectoriel sur lui-même, et un isomorphisme comme une application linéaire bijective.
Pour une application f linéaire d'un K-espace vectoriel V sur un K-espace vectoriel W tous deux de dimension finie et pour le choix d'une base-suite $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V (de **dimension** n) et d'une base-suite $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_m)$ (de **dimension** m) la **matrice** $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est **la matrice de** f **par rapport aux bases-suites** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{B}'$ (quand aucune ambiguité ne pèse sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ l'usage est de noter $Mat(f)$ et l'appeler **la** matrice de f); c'est par définition **la matrice** $(f_{i,j})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}$ où $f_{i,j}$ est bien défini par :

$$\forall i \in [1,n] \cap N\ f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} e_j$$

Si f est un endomorphisme (i.e. $V = W$) il est commode de considérer $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ et de la noter $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ voire $Mat(f)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V alors si $v = \Sigma_{i=1}^n x_i e_i$ on représente par la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ les coordonnées $x_1, ..., x_n$ de v par rapport à la base $\mathcal{B}$: c'est à dire on note $v \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Si $Mat_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ alors $f(v) \begin{pmatrix} \Sigma_{j=1}^n a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \Sigma_{j=1}^n a_{n,j} x_j \end{pmatrix}$; autrement écrit $f(v)$ a pour coordonnées $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Résoudre en $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ le système d'équations linéaires $(S) \begin{pmatrix} \Sigma_{j=1}^n a_{1,j} x_j & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ \Sigma_{j=1}^n a_{n,j} x_j & = & b_n \end{pmatrix}$ équivaut à résoudre l'équation matricielle

$$(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à trouver le vecteur inconnu $v\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $f(v) = b$ où $b\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Ecrire que $\forall b \in V$ l'équation $f(v) = b$ d'inconnue $v \in V$ admet une solution unique équivaut à écrire que f est bijective c'est à dire que f est un isomorphisme de V. Mais écrire que $\forall b \in V$ l'équation $f(v) = b$ d'inconnue $v \in V$ admet une solution unique équivaut à écrire que le système d'équations linéaires (S) $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j & = & b_n \end{pmatrix}$ a pour tout choix de $b_1, \ldots, b_n \in K$ une solution unique. **On a donc l'équivallence : (S) a une solution unique quelque soit son second membre si et seulement si f est un isomorphisme.**

Définition des formes n-linéaires

Si $n = 2$ la condition nécessaire et suffisante pour que (S) $\begin{cases} (1) & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ (2) & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \end{cases}$ ait une solution unique quelques soient b_1 et b_2 est que $a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{2,1} \times a_{1,2} \neq 0$. On peut, par le calcul , montrer que le terme $a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{2,1} \times a_{1,2}$

s'écrit aussi $g\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}\right)$ où g est linéaire en chacune de ses variables $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}$ ceci amène la

Définition : Une forme n-linéaire est une application
$f \ : \ \left\{ \begin{array}{l} K^n \longrightarrow K \\ (x_1 \ldots, x_n) \mapsto f(x_1 \ldots, x_n) \end{array} \right.$ dont chaque application partielle
$f_{i,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n} \ : \ \left\{ \begin{array}{l} K \longrightarrow K \\ x_i \mapsto f(x_1 \ldots, x_n) \end{array} \right.$ est K-linéaire.

L'ensemble des formes n-linéaires est un K-espace vectoriel noté $L_n(K)$.

Quelques qualités des formes n-linéaires

Action de $\mathcal{S}_n$ sur les formes n-linéaires

On définit bien une action du groupe $\mathcal{S}_n$ par : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, f \in L_n(K)$ par $\sigma.f = g \in L_n(K)$ où

$$g \ : \ \left\{ \begin{array}{l} K^n \mapsto K \\ (x_1, \ldots, x_n) \ \mapsto \ f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) \end{array} \right.$$

puisque $Id.f = f, \ \forall f \in L_n(K)$ et
$\forall \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n, \forall f \in L_n(K), \forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$

$$\begin{aligned} \tau.(\sigma.f(x_1, \ldots, x_n)) &= \tau.f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) \\ &= f\left(x_{\tau(\sigma(1))}, \ldots, x_{\tau(\sigma(n))}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f\left(x_{\tau\circ\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau\circ\sigma(n)}\right) \\
&= (\tau \circ \sigma).f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)
\end{aligned}
$$

c.a.d $\tau.(\sigma.f) = (\tau \circ \sigma).f$.

Symétrie, antisymétrie

Définition de la K-signature ε_K : Si 1_K est le neutre de K pour son produit alors son opposé -1_K est égal à 1_K si et seulement si la caractéristique de K est 2. On définit le morphisme ε_K de $\mathcal{S}_n$ vers le groupe fini (à un seul élément en caractéristique 2) $\{1_K, -1_K\}$ par $\forall\sigma \in \mathcal{S}_n$:

- $\varepsilon_K(\sigma) = 1_K \Longleftrightarrow \varepsilon(\sigma) = 1$
- $\varepsilon_K(\sigma) = -1_K \Longleftrightarrow \varepsilon(\sigma) = -1$

ε_K **est le morphisme constant si et seulement si K a pour caractéristique** 2.
Dans ce qui suit on notera, pour simplifier les écritures, ε au lieu de ε_K.
Définition : On dit que $f \in L_n(K)$ est symétrique si

$$\forall\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \varepsilon(\sigma) = -1 \Rightarrow \sigma.f = f$$

et on note $f \in S_n(K)$.
Définition : On dit que $f \in L_n(K)$ est antisymétrique si

$$\forall\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \varepsilon(\sigma) = -1 \Rightarrow \sigma.f = -f$$

et on note $f \in AS_n(K)$.
Propriété : $S_n(K)$ et $AS_n(K)$ sont des sous-espaces K-vectoriels de $L_n(K)$.
Preuve : Comme $\sigma.0 = 0$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$: si $\varepsilon(\sigma) = -1$ alors $\sigma.0 = \pm 0$ de sorte que $0 \in AS_n(K) \cap S_n(K)$. $AS_n(K)$ et $S_n(K)$ ne sont donc pas vides.
Soient $\sigma \in \mathcal{S}_n$; $f, g \in L_n(K)$; $\lambda, \mu \in K$, alors on vérifie, en prenant l'image de $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, que

$$\sigma.(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.(\sigma.f) + \mu.(\sigma.g)$$

Si $f, g \in S_n(K)$ et $\varepsilon(\sigma) = -1$ alors $\sigma.f = f$ et $\sigma.g = g$, donc $\lambda.(\sigma.f) + \mu.(\sigma.g) = \lambda.f + \mu.g$ puis $\sigma.(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.f + \mu.g$ et $\lambda.f + \mu.g \in S_n(K)$.
Si $f, g \in AS_n(K)$ et $\varepsilon(\sigma) = -1$ alors $\sigma.f = \varepsilon(\sigma)f$ et $\sigma.g = \varepsilon(\sigma)g$ et

$$\begin{aligned}
\sigma.(\lambda.f + \mu.g) &= \lambda.(\sigma.f) + \mu.(\sigma.g) \\
&= \lambda.(\varepsilon(\sigma).f) + \mu.(\varepsilon(\sigma).g) \\
&= \varepsilon(\sigma).\left(\lambda.f + \mu.g\right)
\end{aligned}$$

donc $\lambda.f + \mu.g \in AS_n(K)$.

Formes n-linéaires alternées

Définition : Soit $f \in L_n(K)$ alors f est dite alternée, on note $f \in A_n(K)$ si et seulement si

$$((\exists\ 1 \leq i, j \leq n)/(i \neq j)\ et\ (x_i = x_j)) \Rightarrow f(x_1, ..., x_n) = 0$$

Propriété : Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique.
Soit une permutation τ alors $\exists\ 1 \leq i, j \leq n/$ $\tau(i) = j$.
On utilise la n-linéarité de f pour calculer $f_{i,j} =$

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \\ &\quad f(x_1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \\ &\quad f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ &= 0 + f(x_1, \ldots, x_n) + \tau.f(x_1, \ldots, x_n) + 0 \end{aligned}$$

f est alternée donc $f_{i,j} = 0$ puis il vient $f(x_1, \ldots, x_n) + \tau.f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Cette dernière égalité étant vraie pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ et pour tout i, j tels que $i \neq j$, il suit que pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_n : \tau.f = -f$. Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ pouvant s'écrire $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_s$ où τ_i est pour tout i une transposition et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^s$ (en effet $\varepsilon(\sigma) = \Pi_i\, \varepsilon(\tau_i) = (-1)^s$), on a alors $\sigma.f = (\tau_1 \circ \ldots \tau_s).f = (-1)^s.f$ par une récurrence élémentaire. f est donc antisymétrique.
Propriété : Si la caractéristique de K est différente de 2 alors toute forme n-linéaire antisymétrique est alternée.
Preuve : Soit $f \in AS_n(K)$, supposant que $\exists\ 1 \leq i, j \leq n/(i \neq j)\ et\ (x_i = x_j)$, appelons τ la transposition telle que $\tau(i) = j$. Puisque

$x_i = x_j$, $\tau.f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, mais $\tau.f(x_1, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_n)$ car f est antisymétique, donc $f(x_1, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_n)$ soit $(1+1).f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Si K est de caractéristique différente de 2 alors de $1+1 \neq 0$ il suit $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$: f est alternée.

Un exemple de forme n-linéaire antisymétrique et non-alternée : soit $n \geq 2$, $K = Z/2Z$ et $f(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i=1}^n x_i$ est n-linéaire et symétrique donc antisymétrique (K est de caractéristique 2!) f n'est pas alternée puisque

$$f(1, \ldots, 1) = \prod_{i=1}^n 1 = 1 \not\equiv 0(mod\ 2)$$

Dimension de $A_n(K)$ en caractéristique différente de 2

Théorème : Si K est de caractéristique différente de 2 alors $dim(A_n(K)) = 1$.

Preuve : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base-suite de K^n, soient $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ posons $\forall j,\ x_j = \Sigma_{i=1}^n x_{i,j} e_i$, soit $f \in A_n(K)$ nous notons $[a,b]_N = [a,b] \cap N$, nous posons $g = f(x_1, \ldots, x_n)$ alors

$$\begin{aligned} g &= f\left(\sum_{i=1}^n x_{i,1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^n x_{i,n} e_i\right) \\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_n) \in ([1,n]_N)^n} x_{i_1,1} \ldots x_{i_n,n} f\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\right) \end{aligned}$$

f est **alternée**, pour tout choix d'indices $i_1, \ldots, i_n$ dans $[1,n]_N$, $f\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\right)$ est nul si $e_{i_k} = e_{i_j}$

pour $k \neq j$: g est donc **la somme des termes** $x_{i_1,1} \ldots x_{i_n,n} f\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\right)$ **avec** $e_{i_1} \neq \ldots \neq e_{i_n}$, c'est à dire que

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n} f\left(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n} \sigma.f\left(e_1, \ldots, e_n\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma) f\left(e_1, \ldots, e_n\right) \end{aligned}$$

Posons

$$det_{(e_1,\ldots,e_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma)$$

alors l'application

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto det_{(e_1,\ldots,e_n)}(x_1, \ldots, x_n)$$

appelée **déterminant de** $(x_1, \ldots, x_n)$ **par rapport à la base** $(e_1, \ldots, e_n)$ est n-linéaire alternée.

Elle est n-linéaire : si pour $j \in [1, n]_N$ on remplace x_j par $x'_i = \lambda y_j + \mu z_j$, alors pour tous les $i \in [1, n]_N$ on remplace $x_{i,j}$ par $x'_{i,j} = \lambda y_{i,j} + \mu z_{i,j}$; Substituer x'_i à x_i dans $det_{(e_1,\ldots,e_n)}(x_1, \ldots, x_n)$ revient à substituer $x'_{i,j} = \lambda y_{i,j} + \mu z_{i,j}$ à $x_{i,j}$ dans l'expression de $det_{(e_1,\ldots,e_n)}(x_1, \ldots, x_n)$: ceci revient à substituer- dans chaque terme de la somme $\Sigma_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma)$- à chaque terme $x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma)$ le terme $x_{\sigma(1),1} \ldots \left(\lambda y_{\sigma(j),j} + \mu z_{\sigma(j),j}\right) \ldots . x_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma)$. **En**

distribuant chaque produit $x_{\sigma(1),1}\dots\left(\lambda y_{\sigma(j),j}+\mu z_{\sigma(j),j}\right)\dots x_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma)$ **par rapport à son j-ième facteur il vient**

$$\begin{aligned} det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,(\lambda y_i+\mu z_j),\dots,x_n) = \\ \lambda det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n) + \\ \mu det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,z_j,\dots,x_n) \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'application $det_{(e_1,\dots,e_n)}$ est n-linéaire.

Elle est alternée : Supposons que pour $i \neq j$ $x_i = x_j$ alors si τ est la transposition telle que $\tau(i) = j$ et en posant $\sigma = \sigma' \circ \tau$ (équivallent à $\sigma' = \sigma \circ \tau$) on voit que **puisque $\mathcal{S}_n$ est un groupe**, σ' décrit $\mathcal{S}_n$ quand σ' décrit $\mathcal{S}_n$ et on a

$$\begin{aligned} det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n} x_{\sigma'\circ\tau(1),1}\dots x_{\sigma'\circ\tau(n),n}\varepsilon(\sigma'\circ\tau) \\ &= \varepsilon(\tau)\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n} x_{\sigma'\circ\tau(1),1}\dots x_{\sigma'\circ\tau(n),n}\varepsilon(\sigma') \\ &= -\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n} x_{\sigma'\circ\tau(1),1}\dots x_{\sigma'\circ\tau(n),n}\varepsilon(\sigma') \end{aligned}$$

Remarquons que τ étant une transposition l'égalité $\varepsilon(\tau) = -1$ est vraie même si la caractéristique de K et 2 (dans ce dernier cas seulement on a aussi $\varepsilon(\tau) = 1$).
Soit à présent $k \in [1, n]_N$

- Si $k \neq i$ et $k \neq j$ alors $x_{\sigma'\circ\tau(k),k} = x_{\sigma'(k),k}$ puis

$\tau(k) = k$

- Si $k = i$ alors $x_{\sigma'\circ\tau(k),k} = x_{\sigma'\circ\tau(i),i} = x_{\sigma'(j),i}$ soit $x_{\sigma'(j),j}$ puisque $x_i = x_j$.

- Si $k = j$ alors $x_{\sigma'\circ\tau(k),k} = x_{\sigma'\circ\tau(j),j} = x_{\sigma'(i),j}$ soit $x_{\sigma'(i),i}$ puisque $x_j = x_i$.

Le produit $x_{\sigma'\circ\tau(1),1}\dots x_{\sigma'\circ\tau(n),n}\varepsilon(\sigma')$ **est donc le produit** $x_{\sigma'(1),1}\dots x_{\sigma'(n),n}\varepsilon(\sigma')$, il vient finalement

$$\begin{aligned} det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,x_n) &= -\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n} x_{\sigma'\circ\tau(1),1}\dots x_{\sigma'\circ\tau(n),n}\varepsilon(\sigma') \\ &= -\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n} x_{\sigma'(1),1}\dots x_{\sigma'(n),n}\varepsilon(\sigma') \\ &= -det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

Ceci équivaut à $det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,x_n) = 0$ si la caractéristique de K est différente de 2.
On a prouvé que l'application $(x_1,\dots,x_n) \mapsto det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,x_n)$ est n-linéaire et alternée et toute application n-linéaire et alternée f vérifie :

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(e_1,\dots,e_n) \times det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,x_n)$$

soit, si la cararactéristique de K n'est pas 2, alors $dim(A_n(K)) = 1$. CQFD!

Les applications déterminant

Déterminant de vecteurs par rapport à une base-suite, déterminant d'une matrice

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base-suite de K^n on note $det_{\mathcal{B}}$ l'application n-linéaire alternée telle que

$$det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma)$$

c'est d'après ce qui précède l'unique application n-linéaire alternée f telle que $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$, cette application induit une application n-linéaire et alternée -encore appelée déterminant- de $M_n(K)$ vers K qui à $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ associe

$$Det(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma)$$

Propriété : Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases-suites de K^n alors

$$det_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n) \times det_{\mathcal{B}'}(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

Preuve : L'application : $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n)$ est n-linéaire et alternée : $\exists \lambda \in K /$

$$det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \times det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n),\ \forall (x_1, \ldots, x_n)$$

Choisissons $(x_1, \ldots, x_n) = (e_1, \ldots, e_n)$ alors

$$det_{\mathcal{B}'}(e_1, \ldots, e_n) = \lambda \times det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \lambda$$

Choisissons $(x_1, \dots, x_n) = (e'_1, \dots, e'_n)$ alors

$$\begin{aligned} 1 = det_{\mathcal{B}'}(e'_1, \dots, e'_n) &= \lambda \times det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) \\ &= det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \times det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) \end{aligned}$$

Déterminant d'endomorphismes linéaires

Propriété et définition Soit f un endomorphisme linéaire de K^n vers K^n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base suite de K^n, l'application de K^n dans K^n $\varphi(\mathcal{B}, f) \ : \ (x_1, \dots, x_n) \mapsto det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est multilinéaire et alternée, on défini alors $det_{\mathcal{B}}(f)$ comme l'unique $\lambda \in K$ tel que $\varphi(\mathcal{B}, f) = \lambda \times det_{\mathcal{B}}$.
Preuve : Pour $i \in [1, n]_N$ nous substituons $x'_i = \lambda y_i + \mu z_i$ à x_i dans $det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n))$ $\lambda f(y_i) + \mu f(z_i)$ est substitué $f(x_i)$. Mais $det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire et par linéarité de la i-ème application partielle de $det_{\mathcal{B}}$ on a

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}, f)(x_1, \dots, \lambda y_i + \mu z_i, \dots, x_n) &= \lambda \varphi(\mathcal{B}, f)(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &+ \mu \varphi(\mathcal{B}, f)(x_1, \dots, z_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

La i-ème application partielle de $\varphi(\mathcal{B}, f)$ est linéaire $\varphi(\mathcal{B}, f)$ est n-linéaire.
Si pour $i \neq j$ $x_i = y_j$ alors $f(x_i) = f(x_j)$ et comme le déterminant est alterné :

$$\varphi(\mathcal{B}, f)(x_1, \dots, x_n) = det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = 0$$

D'après ce qui précède on a $\varphi(\mathcal{B}, f) = \lambda \times det_{\mathcal{B}}$ avec $\lambda \in K$.

Propriétés

- [(i)] Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ alors

$$det_{\mathcal{B}}(f) = det_{\mathcal{B}}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$$

.

- [(ii)] Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$: f est un isomorphisme si et seulement si $det_{\mathcal{B}}(f) \neq 0$.
- [(iii)] Si f est un isomorphisme de K^n alors pour toute base-suite de K^n

$$det_{\mathcal{B}}(f) \times det_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = 1$$

- [(iv)] Si $f,\ g$ sont des endomorphismes de K^n alors pour toute base-suite de K^n

$$det_{\mathcal{B}}(f \circ g) = det_{\mathcal{B}}(f) \times det_{\mathcal{B}}(g)$$

Preuve :(i) Si $(x_1, \ldots, x_n) = (e_1, \ldots, e_n)$ alors

$$det_{\mathcal{B}}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right) = det_{\mathcal{B}}(f) det_{\mathcal{B}}\left(e_1, \ldots, e_n\right) = det_{\mathcal{B}}(f)$$

(ii) Si f est un isomorphisme de K^n alors l'image de $\{e_1, \ldots, e_n\}$) -soit $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$- est une partie libre de K^n :

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)$$

Si $\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$ alors $f\left(\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0 = f(0)$, mais f est bijective donc $\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ et comme $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une partie

libre : $\lambda_i = 0,\ \forall i \in [1, n]_N$.
Si f est un isomorphisme de K^n alors l'image de $\{e_1, \ldots, e_n\}$) -soit $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$- est une partie génératrice de K^n : f est bijective donc $\forall v \in K^n, \exists u \in K^n / v = f(u)$, mais $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base-suite de K^n : $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K / u = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i e_i$, il suit que $v = f(u) = \Sigma_{i=0}^n \lambda_i f(e_i)$.
$\mathcal{B}' = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base suite et la relation

$$det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \times det_{\mathcal{B}'}(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

entraîne en particulier que $det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit $det_{\mathcal{B}}(f)$ n'est pas nul.
Réciproquement si $det_{\mathcal{B}}(f)$ -soit $det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$- n'est pas nul alors $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une partie libre de K^n. En effet dans le cas contraire il existe une combinaison linéaire non nulle de $f(e_1), \ldots, f(e_n)$; Si i est un indice pour lequel le coefficient de $f(e_i)$ dans cette combinaison linéaire n'est pas nul, alors on peut exprimer $f(e_i)$ comme combinaison linéaire de $f(e_1), \ldots, f(e_{i-1}), f(e_{i+1}), \ldots, f(e_n)$. En remplaçant $f(e_i)$ par cette combinaison linéaire et en développant $det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ on obtient une combinaison linéaire de $det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_{i-1}), f(e_k), f(e_{i+1}), \ldots, f(e_n))$ où $k \in [1, n]_N \backslash \{i\}$. Pour ces valeurs de k tout

$det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_{i-1}), f(e_k), f(e_{i+1}), \ldots, f(e_n))$ est nul : $det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est alors nul ce qui est contradictoire. $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une partie libre de K^n, c'est une partie génératrice car toute partie libre à n éléments d'un espace vectoriel de dimension n est génératrice : Soit $\mathcal{P} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une partie libre du K-espace vectoriel V de dimension n et soit $v \in V \backslash \mathcal{P}$ alors la partie (à $n+1$ éléments) $\mathcal{P} \cup \{v\}$ n'est pas libre : il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls d'éléments de $\mathcal{P} \cup \{v\}$. Le coefficient de v n'est pas nul (sa nullité entraînerait que $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ n'est pas une partie libre), et après produit de la combinaison linéaire par l'inverse de ce coefficient on peut exprimer v comme combinaison linéaire d'éléments de $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ qui est alors une partie génératrice de V.

(iii) Soit $\mathcal{B}$ la base-suite $(e_1, \ldots, e_n)$ et f un isomorphisme de K^n alors

$$det_{\mathcal{B}}\left(f(v_1), \ldots, f(v_n)\right) = det_{\mathcal{B}}(f) \times det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Nous choisissons $\forall i,\ v_i = f^{-1}(e_i)$ alors l'égalité précédente devient

$$1 = det_{\mathcal{B}}(f) \times det_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)$$

(iv) $\forall v_1, \ldots, v_n \in K^n$

$$\begin{aligned} det_{\mathcal{B}}(f \circ g)\,(v_1, \ldots, v_n) &= det_{\mathcal{B}}\,(f \circ g(v_1), \ldots, f \circ g(v_n)) \\ &= det_{\mathcal{B}}(f) \times det_{\mathcal{B}}\,(g(v_1), \ldots, g(v_n)) \\ &= det_{\mathcal{B}}(f) \times det_{\mathcal{B}}(g) \times det_{\mathcal{B}}\,(v_1, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

mais

$$det_{\mathcal{B}}(f \circ g)\,(v_1, \ldots, v_n) = det_{\mathcal{B}}(f \circ g) \times det_{\mathcal{B}}\,(v_1, \ldots, v_n)$$

d'où $det_{\mathcal{B}}(f \circ g) = det_{\mathcal{B}}(f) \times det_{\mathcal{B}}(g)$.

Traduction matricielle des propriétés du déterminant des endomorphismes

- [(i')] Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ alors
$$det_{\mathcal{B}}(f) = det_{\mathcal{B}}(Mat(f))$$
.
- [(ii')] $M \in M_n(K)$ est inversible si et seulement si $det(M) \neq 0$
- [(iii')] Si M est inversible alors
$$det(M) \times det\left(M^{-1}\right) = 1$$
- [(iv')] Si $M,\ N \in M_n(K)$ alors
$$det(M \times N) = det(M) \times det(N)$$

Preuve : (i') $det_{\mathcal{B}}(f) = det_{\mathcal{B}}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est par définition $Mat_{\mathcal{B}}(f)$
(ii'), (iii'), (iv') : Toute matrice M de $M_n(K)$ est matrice d'un d'un endomorphisme f par rapport à

la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, avec $e_i = \underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{i}$ (et toute matrice M de $M_n(K)$ est matrice d'un d'un endomorphisme f par rapport à cette base, les relations (ii'), (iii'), (iv') se déduisent donc des relations (ii) (iii) (iv)).

Propriété Si f est un endomorphisme de K^n, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases-suites alors $det_{\mathcal{B}}(f) = det_{\mathcal{B}'}(f)$. **On peut alors noter $det(f)$ en place de $det_{\mathcal{B}}(f)$: $det(f)$ est un invariant c'est à dire une quantité qui ne dépend que de f et de la dimension d'un K espace-vectoriel.** On lit aussi, dans la littérature mathématique, $\det_{\mathcal{B}}$ est **canonique pour signifier indépendant du choix de $\mathcal{B}$**.

Preuve :

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases-suites et f un endomorphisme linéaire alors on a la formule

$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id).Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id)$$

En effet si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}'$ alors $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id).\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ est le vecteur coordonnées de

v dans la base-suite $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Pour tout i **la i-ème colonne** de $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id)$ est le produit de $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ par la i-ème colonne de $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id)$ (qui est le vecteur coordonnées de e'_i dans la base $\mathcal{B}$) : c'est, dans la base $\mathcal{B}$, le vecteur coordonnées de $f(e'_i)$; **la i-ème colonne** de $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id).Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ est le produit de $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id)$ par la i-ème colonne de $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ (qui est le vecteur coordonnées de $f(e'_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$) : c'est, dans la base $\mathcal{B}$, le vecteur coordonnées de $f(e'_i)$.
Pour tout i, $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id)$ et $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id).Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ ont même i-ème vecteur colonne : ces matrices sont égales.
Mais $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id)$ est inversible puisque

$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id).Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id) = I_n$$

Pour tout i, le i-ème vecteur colonne de $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id)$ est , **dans la base $\mathcal{B}'$** le vecteur coordonnées de e_i; le produit de $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id)$ par ce vecteur est , **dans la base $\mathcal{B}$**, le vecteur coordonnées de e_i : ce vecteur colonne est donc Le i-ème vecteur colonne de la matrice I_n.
On a alors l'identité

$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id)\right)^{-1}.Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id)$$

Puis, en égalant les déterminants de ces matrices

$$\begin{aligned}
det_{\mathcal{B}'}(f) &= det\left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)\right) \\
&= det\left(\left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id)\right)^{-1}.Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id)\right) \\
&= det\left(Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\right) = det_{\mathcal{B}}(f)
\end{aligned}$$