De l'anneau des polynômes de différentielles à une va**r**iable et à coefficients sur un corps différentiel

Alain **W**azner et nombre d'algèbristes

Aux lectrices et lecteurs

La principale caractéristique de la langue française est son absence de neutre et si vous parvenez à lire ce texte vous le devez à vos yeux, aux technologies du Web et à votre connaissance du français. Il faut beaucoup d'imagination pour prouver des théorèmes de mathématique, il en faut encore plus chanter ou jouer la comédie, aussi, ne faut-il pas prendre cet essai de vulgarisation comme un texte philosophique mais seulement comme tentative de rendre plus claires des questions difficiles auxquelles son auteur ne prétend pas connaître toutes les réponses à lui seul.

Introduction.

Un des intérêts des connexions est qu'elles permettent par le lemme du vecteur cyclique de ramener l'étude d'un polynôme d'une algèbre non commutative à celle d'un opérateur particulier d'ordre 1 : une connexion différentielle. Par analogie avec les algèbres commutatives de matrices, l'étude des applications linéaires et de la réduction d'endomorphismes est connectée à celle des polynômes les caractérisant. Pour des applications linéaires sur un corps la théorie des diviseurs élémentaires permet, grâce aux notions d'espaces cycliques ou stables, la factorisation de polynômes en polynômes irréductibles. Le but est, dans cet article, pour les connexions sur des corps différentiels de traduire certaines notions propres aux polynômes d'endomorphismes linéaires sur des corps.

Généralités sur les anneaux non commutatifs unitaires.

Dans cette section A sera un anneau unitaire, non nécessairement commutatif, $\mathcal{U}_A$ sera son groupe des inversibles et dans tout l'article on obtiendra les mêmes énoncés en remplaçant *gauche* ou son abréviation par *droite* ou son abréviation et en renversant les produits.

Diviseurs, p.g.c.d., p.p.c.m., éléments irréductibles.

Définition : soit $a \in A$, on dit que $b \in A$ est un diviseur de A *à gauche* si $a \in (b)_g$, où $(b)_g$ est l'idéal *à gauche* engendré par b. Autrement dit, si $\exists c \in A$ tel que $a = cb$ ce qu'on écrira $b_{|g}a$.
Définitions :

- si $E \subset A$ alors un p.g.c.d. *à gauche* des éléments de E, s'il en existe, est un élément $d \in A$ tel que $\forall e \in E,\ d_{|g}e$ et $\big(\forall e \in E,\ c_{|g}e\big) \Rightarrow c_{|g}d$.

- Si E est une partie **finie** de A alors un p.p.c.m. *à gauche* des éléments de E, s'il en existe, est un élément $p \in A$ tel que $\forall e \in E,\ e_{|g}p$ et $\big(\forall e \in E,\ e_{|g}q\big) \Rightarrow p_{|g}q$.
- Un idéal *à gauche* est un sous-groupe additif de A stable pour la multiplication *à gauche* par tout élément de A.
- Un idéal *à gauche* $I \subset A$ est de type fini *à gauche* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments de A.
- Un anneau A est nœthérien *à gauche* si tout idéal *à gauche* I de A est de type fini.
- Un idéal *à gauche* I de A est dit monogène si et seulement $(\exists i \in A)\ I = \{ai/a \in A\}$.
- Un anneau A est principal *à gauche* si tout idéal *à gauche* I de A est monogène.
- Un anneau A est gradué euclidien *à gauche* si
  - il est intègre.
  - Il existe un stathme euclidien : une application $\nu : A\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ telle que $(\forall a, b \in A\backslash\{0\}), (\exists! q, r \in A)$ *avec* $a = qb + r$ *et* $(r = 0$ *ou* $\nu(r) < \nu(b))$. r, q sont appelés le *reste* et le *quotient* de la *division euclidienne à gauche* de a par b.

– $(\forall p, q \in A)\ \nu(pq) = \nu(qp) = \nu(p) + \nu(q)$

- Tout anneau gradué euclidien *à gauche* est principal *à gauche*.
- Dans un anneau A gradué euclidien *à gauche* un élément a sera dit irréductible *à gauche* si et seulement si l'idéal $(a)_g$ est propre et maximal pour l'ordre de l'inclusion.

Propriété :

- soit A un anneau nœthérien *à gauche* alors
  (1) Tout idéal de A *à gauche* est de type fini.
  (2) Toute suite croissante d'idéaux de A *à gauche* est stationnaire.
  (3) Tout ensemble d'idéaux de A *à gauche* a un élément maximal pour l'inclusion.
- Tout anneau principal *à gauche* est nœthérien *à gauche*.
- Tout anneau A euclidien *à gauche.* est principal *à gauche.*
- Tout élément irréductible d'un anneau unitaire gradué euclidien *à gauche* n'est pas le produit de deux éléments de $A \backslash \mathcal{U}_A$ où $\mathcal{U}_A$ est le groupe multiplicatif des inversibles de A.
- Dans un anneau unitaire gradué euclidien *à gauche* qui n'est pas un corps il existe des

éléments irréductibles et tout élément qui n'est pas inversible est divisible *à gauche* par un élément irréductible *à gauche*.

Preuves :

- soit A un anneau nœthérien *à gauche*.

(1)$\Rightarrow$ (2) : soit $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \ldots$ une suite croissante d'idéaux de A *à gauche* alors la réunion $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un idéal de A *à gauche* engendré par k éléments $a_1, \ldots, a_k \in I$ qui sont tous dans I_N pour un $N \in \mathbb{N}$. On a alors : $I = I_N$ et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang N.

(2)$\Rightarrow$ (3) : soit E un ensemble d'idéaux de A *à gauche*. Si E n'a pas délément maximal alors on construit une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'idéaux de A *à gauche* en choisissant I_0 dans E et, I_n étant choisi, $I_{n+1} \in E$ tel que $I_n \subsetneq I_{n+1}$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire et contredit (2).

(3)$\Rightarrow$ (1) : soit I un idéal *à gauche* de A et E l'ensemble des idéaux contenus dans I et qui sont de type fini. E n'est pas vide puisqu'il contient $\{0\}$, il a donc un élément maximal J dont nous prouvons que c'est I. Soit $a \in I$ si $a \notin J$ alors $J + (a)_g$ est contenu dans I et J n'est pas maximal puisque

$J \subsetneq J + (a)_g$: ce qui est contradictoire.

- Tout idéal d'un anneau A principal *à gauche* est monogène donc de type fini.
- Si I est un idéal de A et $i \in I$ tel que $\nu(i)$ soit minimal. Soit $a \in I$ on effectue la division euclidienne *à gauche* de a par i : $a = qi + r$ avec $r = 0$ ou $\nu(r) < \nu(i)$. $r = 0$ puisque $\nu(i)$ est minimal. Il suit que $I = (i)_g$.
- Soit A un anneau unitaire gradué euclidien *à gauche*. De $1 \times 1 = 1$ nous déduisons que $\nu(1)+\nu(1) = \nu(1)$ soit $\nu(1) = 0$. Si $u \in \mathcal{U}_A$ de $u \times u^{-1} = 1$ nous déduisons que $\nu(u) + \nu(u^{-1}) = 0$ soit $\nu(u) = \nu(u^{-1}) = 0$ puisque ν est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $a = b \times c$ avec $b, c \notin \mathcal{U}_A$ alors $(a)_g \subset (c)_g$ et $\nu(a) = \nu(b) + \nu(c)$ et puisque $\nu(c) > 0$ et $\nu(b) > 0$ c'est que $\nu(a) < \nu(c)$; la division euclidienne *à gauche* de c par a s'écrit alors $c = 0 \times a + c$ et comme son reste c n'est pas 0 c'est que $c \notin (a)_g$: l'idéal $(a)_g$ n'est donc pas maximal et a n'est pas irréductible. Soit $a \in A \setminus \{0\}$ alors soit il est irréductible, auquel cas il est divisible par un irréductible car divisible par lui-même, soit $a = b_1 a_1$ avec $b_1, a_1 \notin \mathcal{U}_A$, soit a_1 est irréductible auquel cas a est divisible par un irréductible soit $a_1 = b_2 a_2$

(et donc $a = b_1b_2a_2$) avec $b_2, a_2 \notin \mathcal{U}_A \ldots$, on construit ainsi un ensemble E, indexé par $\mathbb{N}$, d'idéaux $(a_i)_g \subset (a)_g$. E a un élément maximal a_n qui divise a, a_n n'est pas produit de deux éléments $b_n, c_n \notin \mathcal{U}_A$ car on aurait alors $(b_n)_g \subset (a)_g$ et $(a_n)_g$ non maximal dans E, a_n est donc un diviseur irréductible de a.

Propriété : si A est un anneau gradué euclidien *à gauche* alors :

(i) si $E \subset A$, l'ensemble des p.g.c.d. *à gauche* de E est l'ensemble des $a \in A \backslash \{0\}$ tels que $\sum_{e \in E}(e)_g = (a)_g$.

(ii) L'ensemble des p.p.c.m. *à gauche* de $(a_1, \ldots, a_n)$ est l'ensemble des $a \in A \backslash \{0\}$ tels que $\bigcap_{i=1}^n (a_i)_g = (a)_g$.

Preuve :

(i) **tout générateur de $\sum_{e \in E}(e)_g$ est un p.g.c.d. de E:**
soit $E \subset A$ alors $\sum_{e \in E}(e)_g$ est l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^n a_i e_i$ où $a_i \in A$ et $e_i \in E$; Cet ensemble est un idéal *à gauche* : $(\exists a \in A) \sum_{e \in E}(e)_g = (a)_g$. On a donc

$$(\forall (a_1, \ldots, a_n) \in A^n, \forall (e_1, \ldots, e_n) \in E^n)$$

$$\exists c \in A,\ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = ca$$

En particulier pour $n = 1$ $a_1 = a = 1$ on a $(\forall e \in E), \exists c \in A,\ e = ca$ ce qui équivaut à $(\forall e \in E), a_{|g} e$.
De $\sum_{e \in E} (e)_g = (a)_g$, il suit que $a \in \sum_{e \in E} (e)_g$ et donc

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A^n, \exists(e_1^*, \dots, e_n^*) \in E^n,$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$$

Soit d tel que $\forall e \in E,\ d_{|g} e$ alors

$$\forall e \in E, \exists \alpha(e) \in A\ e = \alpha(e) d$$

puis

$$\exists(\alpha(e_1^*), \dots, \alpha(e_n^*)) \in E^n, \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

$$e_i^* = \alpha(e_i^*) d$$

On a alors

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha(e_i^*) d = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha(e_i^*) \right) d$$

donc $d_{|g} a$ et a est un p.g.c.d. de E.
Tout p.g.c.d. de E est un générateur de $\sum_{e \in E} (e)_g$:
nous distinguons deux cas :

– E est un ensemble fini $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit d un diviseur commun de $e_1, \ldots, e_n$ alors $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $(e_i)_g \subset (d)_g$. En particulier si m est un p.g.c.d. de E, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $(e_i)_g \subset (m)_g$ ce qui entraîne $\sum_{i=1}^n (e_i)_g \subset (m)_g$. Mais, d'après ce qui précède, $\sum_{i=1}^n (e_i)_g \subset (m')_g$ où m' est un p.g.c.d. de E, on a donc $(m')_g \subset (m)_g$. Ceci étant vrai pour tout m', m p.g.c.d. de E, on peut dans les propositions qui précèdent, échanger m et m' et donc $(m')_g \subset (m')_g$ soit

$$(m)_g = (m')_g = \sum_{i=1}^{n} (e_i)_g$$

– E est un ensemble infini alors l'ensemble des sommes finies d'idéaux *à gauche* à générateur dans E est un ensemble d'idéaux de A *à gauche*, anneau nœthérien *à gauche*, il admet un élément maximal $\sum_{i=1}^n (e_i)_g$. Si m est un p.g.c.d. *à gauche* de E alors m divise *à gauche* chaque e_i et donc $\sum_{i=1}^n (e_i)_g \subset (m)_g$, mais comme $\sum_{i=1}^n (e_i)_g$ est maximal $\sum_{i=1}^n (e_i)_g = (m)_g$. Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est un p-uplet quelquonque d'éléments de E alors m, qui est un p.g.c.d. de E, divise *à gauche* chaque f_j et donc

$\sum_{i=1}^{p}(f_j)_g \subset (m)_g$: ceci prouve que pour tout m p.g.c.d. de E *à gauche* l'ensemble des sommes finies d'idéaux générés par un élément de E a pour élément maximum $(m)_g = \sum_{i=1}^{n}(e_i)_g$. Tout générateur de cet élément maximum, donc tout p.g.c.d. *à gauche* de E est un générateur de $\sum_{e\in E}(e)_g$ qui est l'idéal des sommes finies d'idéaux *à gauche* à générateurs dans E.

(ii) Nous montrons d'abord que $\forall P, Q \in A\backslash\{0\}$ $(P)_g \cap (Q)_g \neq (0)_g$ en montrant le
lemme : $\forall P, Q, R \in A\backslash\{0\}$,

– Si $(P)_g \cap (Q)_g = (0)_g$ alors

$$(PR)_g \cap (QR)_g = (0)_g$$

– Si $(P)_g \cap (Q)_g \neq (0)_g$ alors il existe au moins un p.p.c.m. de $\{P, Q\}$, notons le $P \wedge_g Q$ et il existe au moins un p.p.c.m. de $\{PR, QR\}$, notons le $PR \wedge_g QR$, on a de plus : $(\exists u \in \mathcal{U}_A), (P \wedge_g Q)R = v(PR \wedge_g QR)$.

Preuve : si $(P)_g \cap (Q)_g = (0)_g$ alors :
$HP = KQ = 0 \Rightarrow HP = KQ = 0$ et comme $P, Q \in A\backslash\{0\}$ ceci équivaut à :

$$HP = KQ = 0 \Rightarrow H = K = 0$$

Soient à présent $H, K \in A$ tels que $HPR = KQR$ alors $(HP - KQ)R = 0$. Mais

$R \neq 0$ et A intègre entraînent alors $HP = KQ$ qui entraîne $H = K = 0$.
Si $(P)_g \cap (Q)_g \neq (0)_g$ alors :
soit $P \wedge_g Q$ un p.p.c.m. de $\{P, Q\}$, $\exists H, K \in A\backslash\{0\}$ tel que $P \wedge_g Q = HP = KQ$. On en déduit :

$$(\forall R \in A\backslash\{0\}),\ (P \wedge_g Q)R = HPR = KQR.$$

Il suit $(P \wedge Q)_g R \in (PR)_g \cap (QR)_g$: il existe donc un p.p.c.m. de $\{PR, QR\}$, notons le $PR \wedge_g QR$.

$$(\exists v \in A\backslash\{0\}),\ (P \wedge_g Q)R = v(PR \wedge_g QR)$$

Mais $PR \wedge_g QR \in (PR)_g \cap (QR)_g$, donc $(\exists H', K' \in A\backslash\{0\})$, $PR \wedge_g QR = H'PR = K'QR$ puis $H'P = K'Q \in (P)_g \cap (Q)_g$. On a alors $(\exists u \in A\backslash\{0\})$, $H'P = K'Q = u(P \wedge_g Q)$ puis $(\exists u \in A\backslash\{0\})$, $PR \wedge_g QR = H'PR = K'QR = u(P \wedge_g Q)R$ $\exists v, u \in A\backslash\{0\}$ avec $\begin{cases} (P \wedge_g Q)R & = v(PR \wedge_g QR) \\ PR \wedge_g QR & = u(P \wedge_g Q)R \end{cases}$ donc $\begin{cases} (P \wedge_g Q)R & = vu(P \wedge_g Q)R \\ PR \wedge_g QR & = uv(PR \wedge_g QR) \end{cases}$ soit

$$\begin{cases} (1 - vu)(P \wedge_g Q)R & = 0 \\ (1 - uv)(PR \wedge_g QR) & = 0 \end{cases}$$

Mais A est intègre donc $\left\{\begin{array}{ll}(1-vu) & =0 \\ (1-uv) & =0\end{array}\right.$ soit $v, u \in \mathcal{U}_A$ CQFD!

Nous pouvons à présent montrer par récurrence que

$$(a_1, \ldots, a_n) \in (A \backslash \{0\})^n \Rightarrow \cap_{i=0}^{n} (a_i)_g \neq (0)_g$$

il suffit, pour cela, de montrer que :

$$(a, b) \in (A \backslash \{0\})^2 \Rightarrow (a)_g \cap (b)_g \neq (0)_g$$

Si a ou b sont des unités alors $(a)_g \cap (b)_g$ est $(b)_g \neq (0)_g$ ou $(a)_g \neq (0)_g$ suivant que a ou b est une unité. Si ni a ni b ne sont des unités alors nous supposons que $(a)_g \cap (b)_g = (0)_g$. Posons $\left\{\begin{array}{ll} a & = a'(a \vee_g b) \\ b & = b'(a \vee_g b)\end{array}\right.$, où $a \vee_g b$ est un p.g.c.d. de a et b, alors

$$(0)_g = (a)_g \cap (b)_g = \left(a'(a \vee_g b)\right)_g \cap \left(b'(a \vee_g b)\right)_g$$

- **Supposons** $(a')_g \cap (b')_g \neq (0)_g$ **:** alors il existe un p.p.c.m. de $\{a', b'\}$ et, par le lemme qui précède, un p.p.c.m. de $\{a'(a \vee_g b), b'(a \vee_g b)\}$ que nous notons $a' \wedge_g b'$ et $a \wedge_g b$ et

  $$\exists u \in \mathcal{U}_A,\ (a' \wedge_g b')(a \vee_g b) = u(a \wedge_g b)$$

  on en déduit que

  $$\begin{aligned} \left((a' \wedge_g b')(a \vee_g b)\right)_g &= ((a \wedge_g b))_g \\ &= (a)_g \cap (b)_g = (0)_g \end{aligned}$$

ceci entraîne que $(a' \wedge_g b')(a \vee_g b) = 0$ et donc, puisque $a' \wedge_g b' \neq 0$, $a \vee_g b = 0$ qui entraîne $a = b = 0$: ce qui est contradictoire.

– **Supposons** $(a')_g \cap (b')_g = (0)_g$ **:**

$(0)_g = (a'(a \vee_g b))_g \cap (b'(a \vee_g b))_g = (a)_g \cap (b)_g$ de sorte que

$$(a \vee_g b)_g = (a)_g + (b)_g = (a)_g \oplus (b)_g$$

Soient $f, g \in A$ tels que $a \vee_g b = fa + gb$ alors $(a \vee_g b)_g = (fa)_g + (gb)_g = (a)_g \oplus (b)_g$ entraîne que $f, g \in \mathcal{U}_A$.
De $(a)_g \oplus (b)_g = (fa + gb)_g = (fa)_g + (gb)_g$ il suit que $f, g \in \mathcal{U}_A$.
De

$$\begin{aligned}
(a \vee_g b)_g &= (a)_g \oplus (b)_g \\
(a \vee_g b)_g &= (a'(fa + gb))_g + (b'(fa + gb))_g \\
(a \vee_g b)_g &= ((a' + b')fa)_g + ((a' + b')gb)_g
\end{aligned}$$

il suit que $(a' + b')f \in \mathcal{U}_A$ ce qui entraîne que $a' + b' \in \mathcal{U}_A$ puis $(a')_g + (b')_g = A$ soit $(\forall x \in A)\exists H, K \in A,\ x = Ha' + Kb'$.
Nous prouvons à présent l'assertion

$$(\exists x \notin (a)_g) \wedge (Fx = Ga') \Rightarrow F = G = 0$$

Soient $H, K \in A$ tels que $x = Ha' + Kb'$ alors $Fx = Ga'$ entraîne que

$(G - FH)a' = FKb'$ et comme $(a')_g \cap (b')_g = (0)_g$ $FK = G - FH = 0$, A est intègre : $(F = 0) \vee (K = 0)$. Si $K = 0$ alors $x \in (a')_g$. *Si nous choisissons $x \notin (a')_g$ alors $K \neq 0$*, donc $F = 0$ et puisque $Ga' = Fx$ et $a' \neq 0$ il suit $G = F = 0$.

Nous concluons : l'assertion

$$(\exists x \notin (a)_g) \wedge (Fx = Ga') \Rightarrow F = G = 0$$

équivaut à l'assertion

$$(\forall x \notin (a')_g)(a')_g \cap (x)_g = (0)_g$$

$1 \notin (a')_g$ (sinon $a \in \mathcal{U}_A$) donc $(0)_g = (a')_g \cap (1)_g = (a')_g$ ce qui contredit que $a' \neq 0$.

Modules *à gauche* et dérivations sur un anneau commutatif unitaire.

Modules *à gauche* et espaces vectoriels.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire et un groupe commutatif noté, *au risque de la confusion sur le +,* $(M, +)$ on appelle opération externe de A sur M , *notée plus simplement* . , toute application $._A$ de $A \times M$ dans M et on dit que $(M, +, .)$ est un A-module *à gauche* si les propriétés qui suivent sont vérifiées :

- distributivité sur M

$$a.(x+y) = a.x + a.y,\ \forall a \in A \forall x, y \in M$$

- Distributivité sur A

$$(a+b).x = a.x + b.x,\ \forall a, b \in A \forall x \in M$$

- $(a \times b).x = a.(b.x),\ \forall a, b \in A, \forall x \in M$
- $1.x = x$, $\forall x \in M$

Si A est *un corps* alors on dit que $(M, +, .)$ est un A-espace vectoriel.

Exemples :

- les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules *à gauche et à droite.*
- L'ensemble des vecteurs du plan euclidien, des fonctions d'un domaine I dans $\mathbb{R}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Dérivations sur un anneau commutatif unitaire.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire et D un morphisme du groupe $(A, +)$, *qui n'est ni l'identité ni le morphisme nul* alors on dit que D est une dérivation s'il vérifie **l'identité de Leibnitz**

$$\boxed{D(a \times b) = D(a) \times b + a \times D(b),\ \forall a, b \in A}$$

de laquelle se déduit **la formule de Leibnitz**

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in A}$$

$$\boxed{D^n(a \times b) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k}(a) \times D^k(b)}$$

Exemple :

si A est l'anneau des fonctions infiniment dérivables d'un domaine I dans $\mathbb{R}$ le morphisme qui à une fonction associe sa dérivée est une dérivation.

L'anneau des constantes A_D.

Si D est une dérivation sur un anneau de caractéristique c alors l'ensemble $\{x \in A | D(x) = 0\}$ est un anneau de caractéristique c appelé anneau des constantes et noté A_D.
Exemple : si A est l'anneau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ d'un domaine I dans $\mathbb{R}$ et D la dérivation usuelle alors l'anneau des constantes est $\mathbb{R}$.
Preuve : A_D, noyau d'une application additive est un groupe abélien, c'est aussi le noyau d'un demi-groupe multiplicatif par l'identité de Leibnitz c'est un anneau de même caractéristique que A puisque $1_A \in A_D$ est l'unité de A_D.

L'exemple de l'anneau des polynômes différentiels $K[D]$.

Si K est un corps, $K[X]$ son anneau des polynômes, D est la dérivation des polynômes à coefficients sur K et D^i la composée i-ème de D avec elle-même alors on appelle anneau des polynômes différentiels, l'anneau noté $K[D]$ des morphismes $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ avec $a_i \in K[X]$ et muni des opérations d'addition et de composition. Cet anneau est gradué euclidien si on choisit le stathme euclidien ν par $\nu\left(\sum_{i=0}^{n} a_i D^i\right) = n$ si $a_n \neq 0$ et $\nu(0) = 0$. Son corps des constantes est K. La structure d'anneau non commutatif gradué euclidien de $K[D]$ s'enrichit en celle d'algèbre, *doublement non-commutative*, par la donnée de la multiplication externe . définie par

$$. \ : \left\{ \begin{array}{lll} K[X] \times K[X][D] & \rightarrow & K[X][D] \\ (a, P) & \mapsto & aD^0 \times P \end{array} \right.$$

On a les

Propriétés :

(i) la famille $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille-base de l'espace vectoriel $(K[X][D], +, .)$.

(ii) L'anneau $(K[X][D], +, \times)$ est gradué euclidien *à gauche* et *à droite.*

(iii) $\mathcal{U}_{K[X][D]}$ est l'ensemble des opérateurs non nuls de degré (c'est ν) 0 de $K[X][D]$. Ce groupe est isomorphe à $K\backslash\{0\}$.

Nous laissons aux lecteurs le soin d'en faire la preuve qui est technique mais sans grande difficulté.
On a la
Propriété : si $a_n \neq 0$ alors les morphismes $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ sont des applications K-linéaires de $K[X]$ dans $K[X]$ dont les noyaux sont des K-espaces vectoriels de dimension au plus n.
Preuve : par récurrence sur n.
Si $n = 0$ alors l'équation $L(s) = 0$ a pour solution $\{0\}$ espace vectoriel de dimension 0.
Si la propriété est vraie à l'ordre $n - 1$ et si $L = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$ avec $a_n \neq 0$ alors soit *l'équation différentielle* $L(s) = 0$ n'a pas de solution sur $K[X]$, auquel cas l'espace vectoriel des solutions est de dimension 0, soit elle a une solution non nulle $s_0 \in K[X]$, nous effectuons alors le *changement d'inconnue* $s = s_0 u$. Par la **formule de Leibnitz** on voit que $L(s_0 u) = H(u)$ où $H = \sum_{i=1}^{n} b_i D^i$ et $b_n = a_n$ de sorte que $H(u) = J(D(u))$ où $J = \sum_{0}^{n-1} b_{i+1} D^i$. L'équation $H(u) = 0$ est équivallente au système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} J(v) & = & 0 \\ D(u) & = & v \end{array} \right.$$

Nous appliquons à J l'hypothèse de récurrence : le K-espace vectoriel V des solutions de $J(v) = 0$ est au plus de dimension $n - 1$. Si E est le K-

espace vectoriel $D^{-1}(V)$ et p la projection canonique $E \to E/Ker(D) = E/K$ alors il existe un isomorphisme

$$i \ : \ E/K \to D(E) = D(D^{-1}(V)) \subset V$$

tel que $i \circ p = D$.
E/K est isomorphe à $D(E)$ K-espace vectoriel de dimension finie au plus $n-1$ et comme K est un espace vectoriel sur lui-même de dimension 1, E est un K-espace vectoriel de dimension au plus égale à n.
Le K-espace vectoriel des solutions de $H(u) = 0$ est de dimension au plus n et, comme toute solution de $L(s) = 0$ s'exprime par $s = s_0 u$, où $s_0 \neq 0$ et u est solution de $H(u) = 0$, le K-espace vectoriel des solutions de $L(s) = 0$ est de dimension au plus n.

Deux algorithmes de division euclidienne dans $K[X](D)$.

Pour un polynôme différentiel dans $K[X][D]$ le degré, soit le plus grand indice de ses coefficients non nuls, est un stathme euclidien dont nous nous servons pour construire des algorithmes de division euclidienne *à gauche et à droite.*
Pour la division euclidienne *à gauche* de $a = \sum_{i=0}^{deg(a)} a_i D^i$ par $b = \sum_{i=0}^{deg(b)} b_i D^i$ nous considérons les trois suites stationnaires

$(r_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (q_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\begin{cases} \varepsilon_0 &= 0 \\ q_0 &= 0 \\ r_0 &= a \end{cases}$

$$\begin{cases} \varepsilon_n &= Max(0, deg(r_{n-1}) - deg(b)) \\ q_n &= q_{n-1} + \varepsilon_n \frac{r^*_{n-1}}{b_{deg(b)}} D^{\varepsilon_n} b \\ r_n &= r_{n-1} - q_n b \end{cases}$$

où r^*_{n-1} est le coefficient dominant de r_n.
Pour la division euclidienne *à droite* de $a = \sum_{i=0}^{deg(a)} a_i D^i$ par $b = \sum_{i=0}^{deg(b)} b_i D^i$ nous considérons les trois suites stationnaires $(r_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (q_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\begin{cases} \varepsilon_0 &= 0 \\ q_0 &= 0 \\ r_0 &= a \end{cases}$

$$\begin{cases} \varepsilon_n &= Max(0, deg(r_{n-1}) - deg(b)) \\ q_n &= q_{n-1} + b\varepsilon_n \frac{r^*_{n-1}}{b_{deg(b)}} D^{\varepsilon_n} \\ r_n &= r_{n-1} - bq_n \end{cases}$$

où r^*_{n-1} est le coefficient dominant de r_n.
Ces suites sont stationnaires à partir de l'indice $i^* = Max(0, deg(a) - deg(b))$: ces deux algorithmes sont de complexité polynomiale.

Algorithmes pour les p.g.c.d. ***à gauche et à droite*** **d'un nombre fini de polynômes de $K[X][D]$.**

Nous pouvons alors choisir pour algorithmes ceux des divisions euclidiennes, tels qu'ils sont enseignés au lycée pour les entiers, le stathme euclidien étant le degré et les produits s'effectuant *à gauche ou à droite.*

Des connexions modulaires ou vectorielles à une variable.

Définitions :

si D est une dérivation sur un anneau commutatif unitaire $(A, +, \times)$ à valeurs dans un A-module $(M, +, .)$ une connexion modulaire de dérivation D sera une application ∇_D, et plus simplement ∇, additive de M dans M qui *satisfait l'identité dite de Leibnitz* :

$$\forall (x, a) \in M \times A \ \nabla(a.x) = a.\nabla(x) + D(a).x$$

∇ sera dite vectorielle si A est un corps et M un espace vectoriel. *Sauf dans l'exemple qui suit, dans tout ce qui suit les espaces vectoriels considérés seront de dimension finie et on appellera triplet* (K, D, E) *la donnée d'un corps* K*, d'une dérivation* D *sur* K *et d'un espace vectoriel* E *de dimension finie sur* K*.*

Un exemple :

soit l'anneau $K[X][D]$ alors l'application

$$\nabla \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} K[X][D] & \to & K[X][D] \\ P & \mapsto & D \times P \end{array} \right.$$

est une connexon vectorielle de dérivation D telle que, pour tout idéal *à gauche* de $K[X][D]$ de générateur $i \in I$: $D(I) \subset I \Rightarrow \nabla(I) \subset I$.
Preuve : si $I = (i)_g$ alors $\forall x \in K[X]$ $D(x.i) = D(x).i + x.D(i) \in (i)_g$

Matrice d'une connexion vectorielle et formule de changement de base.

Dans cette partie ∇ est une connexion de dérivation D sur un K-espace vectoriel V de dimension n.

Matrice d'une connexion vectorielle.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V on appelle matrice de ∇ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs $(\nabla(e_1), \ldots, \nabla(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est une matrice de $M_n(K)$ que l'on note $(\nabla)_{\mathcal{B}}$.

Formule de changement de base.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ nous posons $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimées dans la base $\mathcal{B}'$.
Si $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 1}$ alors

$$\left\{\begin{array}{lll} e_1 & = & P_{1,1}.e'_1 + P_{2,1}.e'_2 + \cdots + P_{n,1}.e'_n \\ e_2 & = & P_{1,2}.e'_1 + P_{2,2}.e'_2 + \cdots + P_{n,2}.e'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & = & P_{1,n}.e'_1 + P_{2,n}.e'_2 + \cdots + P_{n,n}.e'_n \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}\nabla(e_1) & = & P_{1,1}.\nabla(e'_1)+P_{2,1}.\nabla(e'_2)+\cdots+P_{n,1}.\nabla(e'_n)\\ & + & D(P_{1,1}).e'_1+D(P_{2,1}).e'_2+\cdots+D(P_{n,1}).e'_n\\ \nabla(e_2) & = & P_{1,2}.\nabla(e'_1)+(P_{2,2}.\nabla(e'_2)+\cdots+P_{n,2}.\nabla(e'_n)\\ & + & D(P_{1,2}).e'_1+D(P_{2,2}).e'_2+\cdots+D(P_{n,2}).e'_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \nabla(e_n) & = & P_{1,n}.\nabla(e'_1)+P_{2,n}.\nabla(e'_2)+\cdots+P_{n,n}.\nabla(e'_n)\\ & + & D(P_{1,n}).e'_1+D(P_{2,n}).e'_2+\cdots+D(P_{n,n}).e'_n\end{array}\right.$$

ce qui donne la relation

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\times(\nabla)_{\mathcal{B}}=(\nabla)_{\mathcal{B}'}\times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}+D(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})}$$

Vecteurs cycliques.

Dans cette partie E est un K-espace vectoriel de dimension n, D une dérivation sur K et ∇ une connexion vectorielle.

Définition : un vecteur $y \in E$ est cyclique (pour ∇) si et seulement si la famille $y,\ \nabla(y),\ \ldots,\ \nabla^{n-1}(y))$ est une famille libre dans E. Autrement écrit : si et seulement si $(y,\ \nabla(y),\ \ldots,\ \nabla^{n-1}(y)))$ *est une base* de E. Dans ce cas E est dit *cyclique pour* ∇.

Interprétation. Si E possède un vecteur cyclique alors E est *stable* pour ∇ (autrement écrit $\nabla(E) \subset E$). On peut écrire cette tautologie :

≪ Tout vecteur est cyclique pour l'espace vectoriel engendré par la suite des puissances de ∇ appliquées à ce vecteur ≫. Ce qui suit essaie de répondre aux questions :

- existe-t-il un vecteur cyclique pour tout l'espace E?
- Tout espace stable pour ∇ (qui contient son image par ∇) est-il cyclique?
- Existe-t-il d'autres espaces stables que l'espace de départ E?

Quelques propriétés des vecteurs cycliques. **Définitions et lemme :** on appelle *ordre cyclique* d'un vecteur la dimension de l'espace vectoriel engendré par la suite des puissances de ∇ appliquées à ce vecteur et *espace caractéristique stable* de ce vecteur cet espace vectoriel engendré et on le note $Escars(\nabla, y)$. On appelle *base caractéristique* de ce vecteur la base extraite des premiers vecteurs indépendants de la suite des puissances de ∇ appliquées à ce vecteur. La matrice d'une connexion vectorielle dans une base caractéristique est *compagnon*.

Preuve : pour une base caractéristique de cardinal k il y a un vecteur y pour lequel la base-suite $y,\ \nabla(y),\ \ldots,\ \nabla^{k-1}$ est indépendante et $\nabla^k(y)$ est lié par une relation

$$\nabla^k(y) = c_{n-1}.\nabla^{k-1} + \cdots + c_1.\nabla(y) + c_0.y$$

L'espace vectoriel engendré par la base-uplet $(y,\ \nabla(y),\ \ldots,\ \nabla^{k-1})$ est stable pour ∇ et la matrice de ∇ par rapport à cette base vient naturellement, c'est la matrice compagnon

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & 0 & -c_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

Définitions d'une transformée et d'une connexion associées aux espaces caractéristiques stables.

La connexion dérivation. **Lemme et définition :** sur l'anneau $K[D]$ l'application

$$D_\times \ : \ \begin{cases} K(D] & \to \ K[D] \\ P & \mapsto \ D \times P \end{cases}$$

est une connexion que nous appelons *la connexion dérivation.*

Preuve : la proposition « $D_\times$ est une connexion» se déduit de l'identité de Leibnitz.

La transformée dérivante en un vecteur $y \in E$. **Lemme et définition :** si $y \in E$ est cyclique d'ordre cyclique k alors la famille$\big(y, \ldots, \nabla^{k-1}(y)\big)$ est une base de son espace caractéristique stable et nous appellons transformée dérivante en y l'application K-linéaire bijective qui transforme la base caractéristique en la base $(1, D, \ldots, D^{k-1})$. On note cet isomorphisme $Dante(\nabla, y)$.

Le polynôme différentiel caractéristique d'un vecteur $y \in E$. **Définition :** à tout vecteur $y \in E$ d'ordre cyclique k on peut associer le polynôme différentiel unique $D^k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i D^i$ si la relation de dépendance de $y, \ldots, \nabla^{k-1}(y), \nabla^k(y)$ est la relation $(\nabla^k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i \nabla^i)(y) = 0$. On l'appelle le polynôme différentiel caractéristique de y et on le note $\kappa(\nabla, y)$.

La connexion dérivation du quotient de $K[D]$ par l'idéal caractéristique d'un vecteur $y \in E$ **lemme et définition :** soit $y \in E$ d'ordre cyclique k, $p(\nabla, y)$ la projection canonique $E \stackrel{p(\nabla,y)}{\to} E/(\kappa(\nabla, y))_g$ alors il existe une unique connexion notée $D_\times(\nabla, y)$, on l'appelle *la connexion dérivation caractéristique en y* qui rende commutatif le shéma qui suit :

$$\begin{array}{ccc}
Escars(\nabla, y) & \xrightarrow{\nabla} & Escars(\nabla, y) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle Dante(\nabla,y)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle Dante(\nabla,y)} \\
K[D] & \xrightarrow{D_\times} & K[D] \\
\Big\downarrow {\scriptstyle p(\nabla,y)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle p(\nabla,y)} \\
K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g & \xrightarrow{D_\times(\nabla,y)} & K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g
\end{array}$$

Preuve : la commutativité des quatres flêches de la partie supérieure du shéma est une conséquence directe des définitions qui précèdent. Soit à présent $P,\ P'$ tels que $P - P' \in (\kappa(\nabla, y))_g$ alors $\exists (Q,\ Q',\ R) \left\{ \begin{array}{lcl} P & = & Q \times \kappa(\nabla, y) + R \\ P' & = & Q' \times \kappa(\nabla, y) + R \end{array} \right.$ soit $\left\{ \begin{array}{lcl} D \times P & = & D \times Q \times \kappa(\nabla, y) + D \times R \\ D \times P' & = & D \times Q' \times \kappa(\nabla, y) + D \times R \end{array} \right.$ qui entraîne que

$$(D \times P - D \times P') = (D \times Q - D \times Q') \times \kappa(\nabla, y)$$

tous les représentants de la classe de P appartiennent à la classe de $D \times P$ ce qui induit sur $K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g$ une application unique, notée $D_\times(\nabla, y)$ qui a la classe de $P \in K[D]$ associe la classe de $D \times P \in K[D]$. Comme la classe de la somme $P + Q$ est la somme des classes de P et Q et comme l'application $D_\times$ est additive : $D_\times(\nabla, y)$ est additive. Si $a \in K$

alors de $\left\{\begin{array}{lcl} P & = & Q \times \kappa(\nabla, y) + R \\ P' & = & Q' \times \kappa(\nabla, y) + R \end{array}\right.$ on déduit que $\left\{\begin{array}{lcl} D \times a.P & = & D \times a.Q \times \kappa(\nabla, y) \\ & & +(a.D + D(a)) \times R \\ D \times a.P' & = & D \times a.Q' \times \kappa(\nabla, y) \\ & & +(a.D + D(a)) \times R \end{array}\right.$ ce qui prouve que $D_\times(\nabla, y)$ vérifie bien l'identité de Leibnitz, c'est donc une connexion. La commutativité des quatre flèches de la partie inférieure du shéma résulte alors de la stabilité sur toutes les classes de l'application $P \overset{D_\times}{\mapsto} D \times P$.

L'isomorphisme de cast d'une connexion en un vecteur $y \in E$:

lemme et définition : la composée $p(\nabla, y) \circ Dante(\nabla, y)$ est un isomorphisme K-linéaire de $K[D]$ dans $K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g$ appelé isomorphisme de cast et on le notera $Caste(\nabla, y)$.

Preuve : posons

$$p(\nabla, y) \circ Dante(\nabla, y) = Caste(\nabla, y)$$

alors l'application K-linéaire $Caste$ est un isomorphisme car il transforme la base caractéristique du vecteur y de $Escars(\nabla, y)$ en la base caractéristique de $K[D]/(\kappa(\nabla, y))$.

Nous en déduisons *la commutativité du shéma de* *cast*

$$\begin{array}{ccc}
Escars(\nabla, y) & \xrightarrow{\nabla} & Escars(\nabla, y) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle Caste(\nabla,y)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Caste(\nabla,y)} \\
K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g & \xrightarrow{D_{\times}(\nabla,y))} & K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g
\end{array}$$

Des polynômes de connexions vectorielles.

Définition de polynômes d'une application, d'une connexion, sur un triplet (K, D, E).

On se donne un triplet (K, D, E) et une application f de E dans E et un polynôme $P = \sum_{i=0}^{k} a_i D^i \in K[D]$, le polynôme $P(f)$ sera défini comme l'application de E dans E telle que $x \mapsto \sum_{i=0}^{k} a_i f^i(x)$ où $f^0 = Id$ et si $i \geq 1$ alors $f^i = f \circ f^{i-1}$. Cette définition s'applique en particulier aux connexions ∇ de E dans E.

Shéma de cast et shéma de projection.

Pour tout triplet (K, D, E) et tout polynôme $P \in K[D]$ on a le shéma commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Escars(\nabla, y) & \xrightarrow{P(\nabla)} & Escars(\nabla, y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Caste(\nabla,y)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Caste(\nabla,y)} \\ K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g & \xrightarrow{P(D_\times(\nabla,y))} & K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g \\ \Big\uparrow{\scriptstyle p(\nabla,y)} & & \Big\uparrow{\scriptstyle p(\nabla,y)} \\ K[D] & \xrightarrow{P(D_\times)} & K[D] \end{array}$$

Preuve : la commutativité du shéma de cast

$$\begin{array}{ccc} Escars(\nabla, y) & \xrightarrow{\nabla} & Escars(\nabla, y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Caste(\nabla,y)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Caste(\nabla,y)} \\ K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g & \xrightarrow{D_\times(\nabla,y)} & K[D]/(\kappa(\nabla, y))_g \end{array}$$

se formalise par

$$Caste(\nabla, y) \circ \nabla = D_\times(\nabla, y) \circ Caste(\nabla, y)$$

soit

$$\nabla = Caste(\nabla, y)^{-1} \circ D_\times(\nabla, y) \circ Caste(\nabla, y)$$

qui, par composition itérés et combinaison linéaire, devient $\forall P \in K[D]$

$$P(\nabla) = Caste(\nabla, y)^{-1} \circ P(D_\times(\nabla, y)) \circ Caste(\nabla, y)$$

et prouve la commutativité du shéma supérieur. Par l'utilisation du shéma d'axiomes de substitution la commutativité du shéma inférieur se déduit du shéma de projection

$$\begin{array}{ccc} K[D]/(\kappa(\nabla,y))_g & \xrightarrow{D_\times(\nabla,y)} & K[D]/(\kappa(\nabla,y))_g \\ \uparrow p(\nabla,y) & & \uparrow p(\nabla,y) \\ K[D] & \xrightarrow{D_\times} & K[D] \end{array}$$

Polynômes de connexion et idéaux annulateurs d'un vecteur.

Lemme : si y est un vecteur d'un triplet (K, D, E) alors $\forall x \in Escars(\nabla, y),\ \forall P \in K[D]$,

$$P(\nabla)(x) = Caste(\nabla, y)^{-1} \circ p(\nabla, y)\,(P \times Dante(\nabla, y)(x))$$

Preuve : comme $Caste(\nabla, y)^{-1} \circ p(\nabla, y)$ est une application K-linéaire de $K[D]$ dans $Escars(\nabla, y)$ il suffit de montrer que

$$Caste(\nabla, y)^{-1} \circ p(\nabla, y)\left(D^i \times Dante(\nabla, y)(x)\right) = \nabla^i$$

pour toutes les valeurs entières de i ce que nous faisons par récurrence sur i : y est d'ordre k alors nous pouvons écrire $x = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \nabla^j(y)$ puis

$$\boxed{\begin{array}{rcl} Dante(\nabla, y)(x) & = & \sum_{j=0}^{k-1} c_j D^j \\ p(\nabla, y)\,(Dante(\nabla, y)) & = & \sum_{j=0}^{k-1} c_j D^j \\ Caste^{-1}(\nabla, y) \circ p(\nabla, y)\,(Dante(\nabla, y)) & = & \sum_{j=0}^{k-1} c_j Caste^{-1}(\nabla, y)\left(D^j\right) \\ & = & \sum_{j=0}^{k-1} c_j \nabla^i(y) = x \end{array}}$$

ce qui montre le lemme pour $i = 0$. Supposons à présent que

$$Caste(\nabla, y)^{-1} \circ p(\nabla, y)\left(D^i \times Dante(\nabla, y)(x)\right) = \nabla^i$$

alors :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \nabla^{i+1}(x) & = & Caste(\nabla,y)^{-1}\circ D\times_{\nabla,y}\circ p(\nabla,y)\left(D^i\times Dante(\nabla,y)(x))\right) \\ car\ \nabla^i & = & Caste(\nabla,y)^{-1}\circ D\times_{\nabla,y}\circ Caste(\nabla,y) \\ & = & Caste(\nabla,y)^{-1}\circ p(\nabla,y)\circ D\times\left(Dante(\nabla,y)\right) \\ car\ D\times_{\nabla,y}\circ p(\nabla,y) & = & p(\nabla,y)\circ D\times \\ & = & Caste(\nabla,y)^{-1}\circ\left(D\times D^i.Dante(\nabla,y)\right) \\ & = & Caste(\nabla,y)^{-1}\circ\left(D^{i+1}\times Dante(\nabla,y)\right) \end{array}}$$

Lemme : si y est un vecteur d'un triplet (K,D,E) alors l'ensemble des polynômes de connexion annulateurs de $x\in E$ est un idéal de $K[D]$ *à gauche*.
Preuve : si y annule $P,P'\in K[D]$ alors $\forall Q\in K[D]$ il annule $-P,\ P+P',\ QP$.

Le lemme du transporteur

s'énonce : si A est un anneau euclidien gradué *à gauche*, $L,f\in A\backslash\{0\}$ alors l'ensemble $\{P\in A|\ P\times f\in(L)_g\}$ est un *idéal à gauche* dont on note $L:f$ « un» générateur (on remarquera que $L:f$ est un *groupe multiplicatif*). On a alors la double égalité :

$$\boxed{(L:f)_g f=(f:L)_g L=(f)_g\cap(L)_g}$$

Si $f,\ L$ sont premiers entre eux *à gauche* alors l'idéal $(L:f)_g$ n'est pas nécessairement $K[D]$ contrairement au cas des idéaux sur les anneaux gradués euclidiens commutatifs (par exemple $K[X]$).
Preuve :

- soit $P_0\in\{P\in A|\ P\times f\in(L)_g\}$ et soit

$Q \times P_0$ alors $Q \times P_0 \in (L)_g$ donc $Q \times P_0 \in \{P \in A|\ P \times f \in (L)_g\}$: cet ensemble est un idéal.

- Les éléments de $(f)_g \cap (L)_g$ **sont** tous les polynômes $P \times f$, pour tous les $P \in K[D]$, tels que $P \times f \in (L)_g$ ce **sont** les éléments de l'idéal $(L : f)_g = \{P \in A|\ P \times f \in (L)_g\}$ dont on fait le produit *à gauche* par f donc $(L : f)_g f = (f)_g \cap (L)_g$.

- Les propositions démontrées qui précèdent sont symétriques en f et L- en effet $(f)_g \cap (L)_g = (L)_g \cap (f)_g$- on peut donc, par l'axiome de substitution, échanger dans celles-ci f et L, il suit que $(L : f)_g f = (f : L)_g L$.

Lemme du transport cyclique : si y est un vecteur d'un triplet (K, D, E) d'ordre cyclique k et $x \in Escars(\nabla, y)$ alors l'idéal annulateur de $\nabla(x)$ est l'idéal *à gauche* $(\kappa(\nabla, y) : Dante(\nabla, y)(x))_g$ et comme c'est aussi $(\kappa(\nabla, x))_g$ on a l'égalité

$$\boxed{\forall x \in Escars(\nabla, y),}$$

$$\boxed{(\kappa(\nabla, x))_g = (\kappa(\nabla, y) : Dante(\nabla, y)(x))_g}$$

Preuve : $\forall x \in Escars(\nabla, y) \forall P \in K[D]$

$$P(\nabla)(x) = Caste(\nabla, y)^{-1} \circ p(\nabla, y)\,(P \times Dante(\nabla, y)(x))$$

en particulier si $P(\nabla(x)) = 0$ alors

$$p(\nabla, y)\,(P \times Dante(\nabla, y)(x)) = 0$$

mais comme $x \in Escars(\nabla, y)$ ceci équivaut à $P \times Dante(\nabla, y) \in (\kappa(\nabla, y))_g$ qui équivaut à $P \in (\kappa(\nabla, y) : Dante(\nabla, y))_g$ et comme cet idéal *à gauche* est $(\kappa(\nabla, x))_g$, il vient le lemme.

Etude d'une connexion sur un espace caractéristique stable $Escars(\nabla, y)$ d'un vecteur y d'un triplet (K, D, E).

Dans toute cette section y est d'ordre cyclique k et $x \in Escars(\nabla, y)$.

Cas où $Dante(\nabla, y)(x) \vee_g \kappa(\nabla, y) = 1$.

Le lemme de l'égalité cyclique primaire : s'énonce $Escars(\nabla, y) = Escars(\nabla, x)$
Preuve : $\exists Q, P \in K[D]$,

$$P \times Dante(\nabla, y(x)) + Q \times \kappa(\nabla, y) = 1$$

et en appliquant $Caste^{-1}(\nabla, y) \circ p(\nabla, y)$ à cette égalité nous concluons $\exists P \in K[D],\ P(\nabla)(x) = y$ et donc $Escars(\nabla, y) = Escars(\nabla, x)$.
Preuve : ∇ est stable sur $Escars(\nabla, y)$ et donc

$$\begin{aligned} x \in Escars(\nabla, y) &\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N},\ \nabla^i(x) \in Escars(\nabla, y) \\ &\Rightarrow Escars(\nabla, x) \subset Escars(\nabla, y) \end{aligned}$$

∇ est stable sur $Escars(\nabla, x)$ donc

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \nabla^i(x) \in Escars(\nabla, x)$$

puis par combinaison linéaire à coefficients sur K, $\forall Q \in K[D],\ Q(\nabla)(x) \in Escars(\nabla, x)$. En particulier pour Q variant dans la famille $\left(D^i \times P\right)_{i\in\mathbb{N}}$ on obtient $\forall i \in \mathbb{N},\ \nabla^i\left(P(\nabla)(x)\right) \in Escars(\nabla, x)$ soit $\forall i \in \mathbb{N},\ \nabla^i(y) \in Escars(\nabla, x)$ qui entraîne que $Escars(\nabla, y) \subset Escars(\nabla, x)$.
Nous savons que

$$P(\nabla)(x) = Caste(\nabla, x)^{-1} \circ p(\nabla, x)\left(P \times Dante(\nabla, x)(x)\right)$$

et si on remarque que $Dante(\nabla, x)(x) = 1$ et effectue la division euclidienne *à gauche* de P par $\kappa(\nabla, x)$ soit $P = R \times \kappa(\nabla, x) + P'$ avec $deg(P') < deg\left(\kappa(\nabla, z)\right) = k$ on obtient pour y

$$\begin{aligned} P(\nabla)(x) &= Caste(\nabla, x)^{-1}\left(p(\nabla, x)\left(R\kappa(\nabla, x)\right)\right) \\ &\quad + Caste(\nabla, x)^{-1}\left(p(\nabla, x)(P')\right) \\ &= Caste(\nabla, x)^{-1}\left(p(\nabla, x)(P')\right) \\ &= Caste(\nabla, x)^{-1} \circ p(\nabla, x)\left(P' Dante(\nabla, x)(x)\right) \\ &= P'(\nabla)(x) \end{aligned}$$

Mais $P'(\nabla)(x) = y$ s'écrit aussi

$$Caste(\nabla, x)^{-1} \circ p(\nabla, x)\left(P' \times Dante(\nabla, x)(y)\right) =$$
$$Caste(\nabla, x)^{-1} \circ p(\nabla, x)(1)$$

$Caste(\nabla, x)^{-1} \circ p(\nabla, x)\left(P' \times Dante(\nabla, x)(y) - 1\right)$
$= 0$
$p(\nabla, x)\left(P' \times Dante(\nabla, x)(y) - 1\right) = 0$
$P' \times Dante(\nabla, x)(y) - 1 = -Q' \times \kappa(\nabla, x)$
$P' \times Dante(\nabla, x)(y) + Q' \times \kappa(\nabla, x) = 1$
Comme $deg\left(Dante(\nabla, x)(y)\right) = deg\left(\kappa(\nabla, x) =\right.$

$k > 0$ et $deg(P') < k$ cette égalité entraîne

$$\exists P', Q' \in K[D]$$
$$deg(P') < k \; et \; deg(Q') < k$$
$$P' \times Dante(\nabla, x)(y) + Q' \times \kappa(\nabla, x) = 1$$

Ce qui a préparé le

Théorème de Bézout : si $f, L \in K[D]\backslash K$ vérifient $L \vee_g f = 1$ alors $\exists Q, P \in K[D]$, $(Q \times L + P \times f = 1)$ où $(deg(Q) < deg(f))$ et $(deg(P) < deg(L))$.

Preuve : on ne perd rien à la généralité en supposant que

$$deg(L) = max\,(deg(L), deg(f)) = k > 0$$

Nous distinguons deux cas :

(1) $deg(L) > deg(f)$: si $a_k \neq 0$ est le coefficient de D^k dans L alors $f \vee_g L = f \vee_g a_k^{-1} L = 1$. On pose $a_k^{-1} L = D^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i D^i$, $f = \sum_{i=0}^{k-1} b_i D^i$ où les coefficients b_i ne sont pas tous nuls. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \; \ldots, \; e_k)$ la base canonique de K^k et ∇ la connexion dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice compagnon de dernière colonne $\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{k-1} \end{pmatrix}$ alors, pour ∇, e_1 est un vecteur cyclique d'ordre k, $\kappa(\nabla, e_1) = a_n^{-1} L$, $Dante(\nabla, e_1)\left(\sum_{i=0}^{k-1} b_i e_{i+1}\right) = f$ et par application de la préparation :

$\exists P', Q' \in K[D],\ P' \times f + Q' \times a_n^{-1} L = 1$ $deg(P') < deg(a_n^{-1}L)$ $deg(Q') < deg(f)$ et en posant $P = P'$ $Q = a_k^{-1}$ nous obtenons le théorème de Bézout.

(2) $deg(L) = deg(f)$: nous posons $L = \sum_{i=0}^k c_i D^i$ $f = \sum_{i=0}^k b_i D^i$ avec $c_k \neq 0$ et $b_k \neq 0$ et effectuons la division euclidienne *à gauche* de f par L, son reste est R et le premier pas de l'algorithme du p.g.c.d. par divisions euclidiennes *à gauche* entraîne l'égalité

$$1 = f \vee_g L = L \vee_g R$$

$\exists P',\ Q' \in K[D]$ avec $deg(Q') < deg(R)$ et $deg(P') < deg(L)$ et $P'R + Q'L = 1$. Mais $f = a.L + R$ avec $a \in K\backslash\{0\}$ devient $f = R - a.L$ puis $P' \times f + (Q' - P'.a) \times L = 1$ et le théorème vient en posant $Q = Q' - P'.a$ et $P = P'$.

Corollaire de Bézout : si $f,\ L \in K[D]$ vérifient $F \vee_g L = d$ alors $\exists P,\ Q \in K[D]$ avec $deg(Q) < deg(f) - deg(d)$ et $deg(P) < deg(L) - deg(d)$ tels que $Pf + QL = d$.
Preuve :nous posons $f = f'd$ et $L = L'd$ alors $f' \vee_g L' = 1$ donc $\exists P,\ Q \in K[D]$ avec $deg(Q) < deg(f') = deg(f) - deg(d)$ $deg(P) < deg(L') = deg(L) - deg(d)$ et $Pf' + QL' = 1$.

$Pf' + QL' = 1 \Rightarrow Pf'd + QL'd = Pf + QL = d$. C.Q.F.D.

Cas générique $deg\,(Dante(\nabla, y)(x) \vee_g \kappa(\nabla, y)) = e$**.**

Lemme des degrés : $\forall f,\ L \in K[D]$,

$$deg\,(f \vee_g L) + deg\,(f \wedge_g L) = deg(f) + deg(L)$$

Preuve : sans perte de généralité on peut supposer que $k = deg(f) \geq deg(L)$ et si $f_k \in K\backslash\{0\}$ est le coefficient dominant de f alors on peut écrire $\begin{cases} f \wedge_g L &= (f_k^{-1}.f) \wedge_g L \\ f \vee_g L &= (f_k^{-1}.f) \vee_g L \\ f_k^{-1}.f &= D^k - \sum_{i=0}^{k-1} f_i D^i \\ L &= \sum_{i=0}^{k} l_i D^i \end{cases}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ la base canonique de $E = K^k$ et ∇ la connexion de matrice $(\nabla)_{\mathcal{B}}$ égale à la matrice compagnon de dernière colonne $\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{k-1} \end{pmatrix}$ alors e_1 est un vecteur cyclique d'ordre k, $\kappa(\nabla, e_1) = f_{k-1}^{-1}.f$ et $Dante(\nabla, e_1)\left(\sum_{i=0}^{k-1} l_i e_{i+1}\right) = L$ et, si on pose $z = \sum_{i=0}^{k-1} l_i e_{i+1}$, par le lemme du transport cyclique

$$\kappa(\nabla, z) = \left(\kappa(\nabla, e_1) : Dantes(\nabla, e_1)(z)\right)_g$$

Nous distinguons les cas (1) et (2) :

(1) $f \vee_g L = 1$. Suivant la définition du transporteur $\exists a \in K \backslash \{0\}$

$$\kappa(\nabla, z) \times Dantes(\nabla, e_1)(z) = a.Dante(\nabla, e_1)(z) \wedge_g \kappa(\nabla, e_1)$$

on alors

$$\begin{array}{ll} deg(af_{k-1}^{-1}.f \wedge_g L) & = \\ \boxed{deg(f \wedge_g L) =} & \\ deg\left(a.Dante(\nabla, e_1)(z) \wedge_g \kappa(\nabla, e_1)\right) & = \\ deg\left(\kappa(\nabla, z) \times Dante(\nabla, e_1)(z)\right) & = \\ deg(\kappa(\nabla, z)) + deg(Dante(\nabla, e_1)(z)) & = \\ deg(f) + deg(L) & = \\ \boxed{deg(f) + deg(L) - deg(f \vee_g L)} & \end{array}$$

(2) $f \vee_g L = d \neq 1$. Posons $L = L'd$, $f = f'd$ alors $f' \vee_g L' = 1$ et d'après (1) on a l'égalité $deg(f' \wedge_g L') + 0 = deg(f') + deg(L')$ équivallente à l'égalité

$$deg(f' \wedge_g L') + 2deg(d) = deg(f) + deg(L)$$

équivallente à l'égalité

$$deg(f' \wedge_g L') + deg(d) + deg(f \vee_g L) = deg(f) + deg(L)$$

Il faut donc prouver que

$$deg(f \wedge_g L) = deg(f' \wedge_g L') + deg(d)$$

Nous utilisons pour le faire les transporteurs $f : L$ et $f' : L'$.

Nous savons que $\begin{cases} (f:L)_g L &= (f \wedge_g L)_g \\ (f':L')_g L' &= (f' \wedge_g L')_g \end{cases}$

soit $\begin{cases} (f:L)_g L'd &= (f \wedge_g L)_g \\ (f':L')_g L' &= (f' \wedge_g L')_g \end{cases}$ Les degrés de $f \wedge_g L$ et $f' \wedge_g L'$ sont ceux de $(f:L) \times L' \times d$ et $(f':L') \times L'$ et la preuve vient en montrant que $(f:L)$ et $(f':L')$ ont mêmes degrés ce qui est la conséquence des égalités d'idéaux qui suivent :

$$\begin{aligned} (f':L')_g &= \{P \in K[D] | Pf' \in (L')_g\} \\ &= \{P \in K[D] | Pf'd \in (L')_g d\} \\ &= \{P \in K[D] | Pf \in (L)_g\} \\ &= (f:L)_g \end{aligned}$$

Cas d'irréductibilité de $Caste(\nabla, y)$**.**

Lemme : $P \in K[D]$ est irréductible si et seulement si $deg(Q) < deg(P) \Rightarrow Q \vee_g P = 1$, $\forall Q \in K[D]$.

Preuve :

- si P n'est pas irréductible $\exists R,\ Q \in K[D] \backslash K,\ P = Q \times R$. On a alors $0 < deg(R) < deg(P)$ et $R \vee_g P = a.R$ avec $a \in K \backslash \{0\}$ soit $R \vee_g P \neq 1$.
- Si $\exists Q \in K[D](deg(Q) < deg(P)) \wedge (P \vee_g Q \neq 1)$ alors $O = P \vee_g Q$ est un diviseur *à gauche* de

P et $\exists N \in K[D],\ P = N \times O$. $deg(N) > 0$ puisque $deg(O) < deg(P)$. P, le produit de deux éléments de $K[D]\backslash K$ n'est pas irréductible.

Théorème de l'égalité cyclique irréductible
Si y est un vecteur cyclique d'ordre k d'un triplet (K, D, E) et si $\kappa(\nabla, y)$ est irréductible alors $\forall x \in Escars(\nabla, y)$

- $Escar(\nabla, x) = Escars(\nabla, y)$.
- $\kappa(\nabla, x)$ est irréductible.

Preuve :

- soit $x \in Escars(\nabla, y)$ alors

  $$Dante(\nabla, y)(x) \leq k - 1 < k = deg\left(\kappa(\nabla, y)\right)$$

  $\kappa(\nabla, y)$ est irréductible donc $Dante(\nabla, y)(x) \vee_g \kappa(\nabla, y) = 1$ ce qui entraîne, d'après ce qui précède, $Escars(\nabla, x) = Escars(\nabla, y)$.

- Supposons que d soit un diviseur non unitaire *à gauche* de $\kappa(\nabla, x)$ alors $\exists \kappa'_x \in K[D]$, $\kappa(\nabla, x) = \kappa'_x \times d$. Posons $d = \sum_{i=0}^{deg(d)} d_i D^i$ et $\omega = \sum_{i=0}^{deg(d)} d_i \nabla^i(x)$ alors $Dante(\nabla, x)(\omega) = d$ et $Dante(\nabla, x)(\omega) \vee_g \kappa(\nabla, x) = d$ et

  $$\omega = Caste(\nabla, x)^{-1} \circ p(\nabla, x)(d)$$

alors $dim(Escars(\nabla, \xi)) = k$ ce qui est contradictoire avec

$$dim(Escars(\nabla, \omega)) = dim(Escars(\nabla, x)) - deg(d)$$

et $\kappa(\nabla, x)$ *n'a pas de diviseur propre à gauche* : l'idéal $(\kappa(\nabla, x))_g$ est maximal.

Sous-espaces vectoriels stables d'un espace vectoriel stable $Escars(\nabla, y)$ d'un triplet (K, D, E).

Idéaux associés aux sous-espaces stables d'$Escars(\nabla, y)$ d'un triplet (K, D, E).

Définitions et propriétés :

- un sous-espace vectoriel F de E espace vectoriel d'un triplet (K, D, E) est ∇-stable si et seulement si $\nabla(F) \subset F$.
- Soit y un vecteur d'un triplet (K, D, E) et I un idéal *à gauche* de $K[D]$ alors l'ensemble $I(y) = \{P(\nabla)(y) | P \in K[D]\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui est ∇-stable.
- Le sous-espace vectoriel $I(y) \subset E$ et l'idéal *à gauche* $I(y)$ sont dits associés.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E qui est ∇-stable s'il existe $y \in E$ tel que $F = Escars(\nabla, y)$ alors il existe I idéal de $K[D]$ *à gauche* tel que $F = I(y)$.

Preuve :

- $I(y)$ est un sous-espace vectoriel de E puisque $0 \in I(y)$ et si $P,\ Q \in I(y)$ et $\lambda,\ \mu \in K$ alors $\lambda.P + \mu.Q \in I(y)$. Soit $P \in I$ un idéal *à gauche* de $K[D]$ alors $D \times P \in I$ puis $\nabla\left(P(\nabla)(y)\right) \in I(y)$: $I(y)$ est ∇-stable.

- Soit $J = \{P \in K[D] | P(\nabla)(y) \in F\}$ alors $0 \in J$ et si $P,\ Q \in J$ alors $P + Q,\ -P \in J$ puisque F est un espace vectoriel. Soit $R \in K[D]$ alors $R \times P(\nabla)(y) \in F$ puisque F est ∇-stable. J est un idéal de $K[D]$ *à gauche*. D'autre part **par définition** $J \subset J(y)$ et si $P \in J(y)$ alors $P \in J$ puisque $P(\nabla)(y) \in F$ donc $J = J(y)$.

Les lemmes d'égalité et d'additivité des sous-espaces caractéristiques.
Soient $F,\ G$ deux sous-espaces vectoriels d' $Escars(\nabla, y)$ d'idéaux associés $I,\ J$ alors

- $F + G$ est un sous-espace vectoriel d' $Escars(\nabla, y)$ d'idéal associé $I + J$.
- $F = G$ si et seulement si $\begin{cases} I \subset J + (\kappa(\nabla, y))_g \\ J \subset I + (\kappa(\nabla, y))_g \end{cases}$

Preuve :

- la somme $F+G$, des sous-espaces vectoriel F et G sous-espaces vectoriels d'$Escars(\nabla, y)$ est un sous-espace vectoriel d'$Escars(\nabla, y)$ et si

$P,\ Q \in F,\ G$ alors il existe des idéaux de $K[D]$ *à gauche* tels que $(P, Q) \in I(y) \times J(y)$ et $(P+Q)(\nabla)(y) = P(\nabla)(y) + Q(\nabla)(y)$ appartient à $I(y)+J(y)$ idéal de $K[D]$ *à gauche* car somme des idéaux $I(y)$ et $J(y)$.

- $F \subset G \Leftrightarrow I(y) \subset J(y) + (\kappa(\nabla, y))_g$ puisque chaque proposition qui suit est équivalente :
  - $(\forall x \in F),\ x \in G$.
  - $(\forall P \in I(y),\ \exists Q \in I(y))$ $P(\nabla)(y) = Q(\nabla)(y)$.
  - $(\forall P \in I(y),\ \exists Q \in I(y),\ \exists R \in K[D])$ $P = Q + R \times \kappa(\nabla, y)$
  - $I(y) \subset J(y) + (\kappa(\nabla, y))_g$.
- Par l'axiome de substitution, on permutte G et F, P et Q, $I(y)$ et $J(y)$ dans la suite de propositions précédentes et on prouve que $G \subset F \Leftrightarrow J(y) \subset I(y) + (\kappa(\nabla, y))_g$.

Sous-espaces vectoriels ∇-stables minimaux d'un espace vectoriel E d'un triplet (K, D, E).

Définition.

Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E d'un triplet (K, D, E) est ∇-stable minimum s'il est ∇-stable et non-nul et de dimension minimume dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels

∇-stables et non-nuls de E.

Existence et lemme de caractérisation des sous-espaces vectoriels ∇-stables minimaux d'un espace vectoriel E d'un triplet (K, D, E).

Existence. Pour tout espace vectoriel E d'un triplet (K, D, E) il existe des sous-espaces ∇-stables minimaux de E.

Preuve : la fonction $F \mapsto dim(F)$ à valeur sur les sous-espaces vectoriels de E non nuls et ∇-stables est à valeur sur les entiers et atteint son minimum.

Lemme de caractérisation. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) F est un sous-espace vectoriel de E ∇-stable minimum.

(ii) $\exists y \in F,\ F = Escars(\nabla, y)$ et $\kappa(\nabla, y)$ est irréductible.

(iii) $\forall y \in F,\ F = Escars(\nabla, y)$ et $\kappa(\nabla, y)$ est irréductible.

Preuve : nous prouvons que

- $(i) \Rightarrow (ii)$ par sa contraposée. Supposons que $\forall y \in F, F \neq Escars(\nabla, y)$ ou $\kappa(\nabla, y)$ n'est pas irréductible. Si le premier terme de la conjonction ou est vraie alors F n'est pas ∇-stable ce qui prouve *non* (i). Si le second terme de la conjonction ou est vraie alors $\kappa(\nabla, y)$ un diviseur d propre *à gauche* non unitaire. On peut alors reprendre la preuve du deuxième point du théorème de l'égalité cyclique primaire tout $\kappa(\nabla, y)$ est irréductible : ce qui contredit qu'il ne l'est pas.

- $(ii) \Rightarrow (iii)$: c'est le deuxième point du théorème de l'égalité cyclique primaire.
- $(iii) \Rightarrow (i)$: soit $G \subset F$ un sous-espace vectoriel ∇-stable nous montrons par l'absurde que $G = F$. Supposons que $G \subsetneq F$: soit $x \in G$ alors $F = Escars(\nabla, x)$ et $Escars(\nabla, x) \subset G$ puisque G est ∇-stable. On a donc $F \subset G$ qui contredit $G \subsetneq F$.

Infinitude de l'ensemble des polynômes caractéristiques d'un espace vectoriel ∇ stable minimum et non-nilpotence de toute connexion ∇ d'un triplet (K, D, E)

Lemme d'infinitude de l'ensemble des polynômes caractéristiques d'un espace vectoriel ∇ stable minimum d'un triplet (K, D, E) : soit F un espace vectoriel non nul, ∇-stable et minimum d'un triplet (K, D, E) si ∇ n'est pas nilpotente alors l'ensemble $\{\kappa(\nabla, y) | y \in F\}$ n'est pas fini.

Preuve : si l'ensemble $\{\kappa(\nabla, y) | y \in F\}$ est fini et égal à $\{\kappa(\nabla, y_1), \ \ldots, \ \kappa(\nabla, y_s)\}$ alors si nous considérons $P = \kappa(\nabla, y_1) \wedge_g \cdots \wedge_g \kappa(\nabla, y_s)$ on a

$P(\nabla)(y) = 0,\ \forall y \in F$ et en particulier

$$(\forall \lambda \in K)(\forall y \in F),\ P(\nabla)(\lambda.y) = 0$$

Soit ϕ l'homomorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}$ vers K tel que si $n > 0$ alors $\phi(n) = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n\ fois}$ alors on pose pour des entiers $n \geq p \geq 0$ $\mathbb{C}_n^p = \phi\left(C_n^p\right)$. Par l'application de ϕ à C_n^p, indépendamment de la caractéristique de K, la proposition qui suit est vraie

$$(\forall n,\ p \in \mathbb{N}),\ k+1 \leq n \Rightarrow \mathbb{C}_{n+1}^{p+1} = \mathbb{C}_n^p + \mathbb{C}_n^{p+1}$$

Grâce à elle on peut obtenir, par double récurrence sur n et p, la proposition

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (\forall \lambda \in K),\ (\forall y \in F)$$

$$\nabla^p\left(\lambda.y\right) = \sum_{j=0}^{p} \mathbb{C}_p^j D^{p-j}(\lambda)\nabla^j(y)$$

Pour $j \in \mathbb{N}$ et $P \in K[D]$ nous notons $P^{(j)}$ l'image de l'endomorphisme K-linéaire définie sur la base $\left(D^l\right)_{l\in\mathbb{N}}$ par $\left(D^l\right)^{(j)} = 0$ si $j > l$ et $\left(D^l\right)^{(j)} = \mathbb{C}_l^j D^{l-j}$ si $j \leq l$, on a alors la proposition

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (\forall \lambda \in K),\ (\forall y \in F)$$

$$\nabla^p\left(\lambda.y\right) = \sum_{j=0}^{p} \left(D^p\right)^{(j)}(\lambda)\nabla^j(y)$$

puis par linéarité la proposition

$$(\forall \lambda \in K),\ (\forall y \in F)$$

$$P(\nabla)\,(\lambda.y) = \sum_{j=0}^{deg(P)} (P)^{(j)}\,(\lambda)\nabla^j(y)$$

si $P = \kappa(\nabla, y_1) \wedge_g \cdots \wedge_g \kappa(\nabla, y_s) = \sum_{l=0}^{deg(P)} a_l D^l$
on a

$$(\forall \lambda \in K),\ (\forall y \in F)$$

$$P(\nabla)\,(\lambda.y) \ = \ \sum_{j=0}^{deg(P)} \left(\sum_{l=0}^{deg(P)} a_l (D^l)^{(j)}(\lambda)\right) \nabla^j(y)$$

$$\boxed{(\forall y \in F)(\forall \lambda \in K)}$$

$$\boxed{0 = P(\nabla)\,(\lambda.y) = \sum_{j=0}^{deg(P)} P^{(j)}(\lambda)\nabla^j(y)}$$

Mais $P^{(j)}(\lambda) = \frac{1}{\phi(j!)} \sum_{l=0}^{deg(P)} a_l \frac{\phi(l!)}{\phi(l-j)} D^{l-j}$ et si $Diff : \begin{cases} K[X] & \to & K[D] \\ X^n & \mapsto & D^n \end{cases}$ alors $P^{(j)} = \frac{1}{\phi(j!)} Diff\left(\frac{d^j P}{(dX)^j}\right)$

$$\boxed{(\forall y \in F)(\forall \lambda \in K)}$$

$$\boxed{0 = P(\nabla)\,(\lambda.y) = \sum_{j=0}^{deg(P)} \frac{1}{\phi(j!)} Diff\left(\frac{d^j P}{(dX)^j}\right)(\lambda)\nabla^j(y)}$$

puis

$$\boxed{(\forall y \in F)(\forall \lambda \in K)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} 0 = & \sum_{j=0}^{deg(P)-1} \frac{1}{\phi(j!)} Diff\left(\frac{d^j P}{(dX)^j}\right)(\lambda)\nabla^j(y) \\ & +a_{deg(P)}\nabla^p(y) \end{array}}$$

Quelque soit le choix de $\lambda \in K$ un polynôme de $K[D]$ degré $deg(P)$ annule tout $y \in F$, il annule en particulier $y_1, \ldots, y_s$ dont les polynômes caractéristiques différentiels sont $\kappa(\nabla, y_1), \ldots, \kappa(\nabla, y_s)$: c'est donc un multiple commun *à gauche* de $\kappa(\nabla, y_1), \ldots, \kappa(\nabla, y_s)$ et donc de $\kappa(\nabla, y_1) \wedge_g \cdots \wedge_g \kappa(\nabla, y_s)$ qui est de degré $deg(P)$, et puisque ce polynôme est unitaire c'est donc $\kappa(\nabla, y_1) \wedge_g \cdots \wedge_g \kappa(\nabla, y_s)$. La suite $(a_0, \ldots, a_p)$ des coefficients de $\kappa(\nabla, y_1) \wedge_g \cdots \wedge_g \kappa(\nabla, y_s)$ est donc, indépendamment de λ, la suite $(\frac{1}{\phi(0!)}P(\lambda), \frac{1}{\phi(1!)}Diff\left(\frac{dP}{dX}\right)(\lambda), \ldots, 1)$. La suite $(\frac{1}{\phi(0!)}P(\lambda), \frac{1}{\phi(1!)}Diff\left(\frac{dP}{dX}\right)(\lambda), \ldots, 1)$ ne dépend pas de λ que si $P(\nabla)(y) = \nabla^{deg(P)}$ auquel cas $\nabla^{deg(P)}(y) = 0,\ \forall y \in F$: ∇ est nilpotente. On a prouvé par la contraposée que si la connexion ∇ n'est pas nilpotente alors l'ensemble $\kappa(\nabla, y)$ où $y \in F$ espace vectoriel non nul ∇-stable n'est pas fini.

Sur tout triplet (K, D, E) il n'existe pas de connexion linéaire ∇ nilpotente : soit ∇ une connexion linéaire sur un triplet (K, D, E) et p un entier tel que $\nabla^p = 0$ alors pour tout couple de bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ la formule de changement de base s'écrit

$$(\nabla^p)_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\nabla^p)_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} + P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}D\left(P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)$$

Elle entraîne que $D\left(P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right) = 0$ soit $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in Gl_n(K_D)$ pour tout couple de bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$. Ceci entraîne que $D = 0$, or D n'est pas identiquement nul, il y a contradiction.

Le lemme de sous-recouvrement stable :

soient un triplet (K, D, E), une connexion ∇, y un vecteur d'un espace vectoriel F ∇-stable, $p(\nabla, y, F)$ la projection canonique de $Escars(\nabla, y)$ sur $Escars(\nabla, y)/F$ alors il existe une unique connexion $\nabla|F$ sur $Escars(\nabla, y)/F$ qui rende commutatifs les shémas :

$$\begin{array}{ccc}
Escars(\nabla, y) & \xrightarrow{\nabla} & Escars(\nabla, y) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle p(\nabla,y,F)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p(\nabla,y,F)} \\
Escars(\nabla, y)/F & \xrightarrow{\nabla|F} & Escars(\nabla, y)/F
\end{array}$$

$\forall P \in K[D]$

$$\begin{array}{ccc}
Escars(\nabla, y) & \xrightarrow{P(\nabla)} & Escars(\nabla, y) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle p(\nabla,y,F)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p(\nabla,y,F)} \\
Escars(\nabla, y)/F & \xrightarrow{P(\nabla|F)} & Escars(\nabla, y)/F
\end{array}$$

Preuve : soient $x, z \in Escars(\nabla, y)$, si $x - z \in F$ alors $\nabla(x-z) = \nabla(x) - \nabla(z) \in Escars(\nabla, y) \subset F$; il existe alors une unique application $\nabla|F$ qui rende commutatif le shéma

$$\begin{array}{ccc} Escars(\nabla, y) & \xrightarrow{\nabla} & Escars(\nabla, y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p(\nabla,y,F)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p(\nabla,y,F)} \\ Escars(\nabla, y)/F & \xrightarrow{\nabla|F} & Escars(\nabla, y)/F \end{array}$$

c'est l'application $\nabla|F$ qui à la classe de x *modulo* F, notée x/F, associe la classe de $\nabla(x)$ *modulo* F dont nous laissons au lecteur le soin de vérifier que c'est une connexion sur $Escars(\nabla, y)/F$. Nous déduisons *par combinaisons linéaires* que $\forall P \in K[D]$

$$p(\nabla, y, F) \circ P(\nabla) = P(\nabla|F) \circ p(\nabla, y, F)$$

de

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(\nabla, y, F) \circ \nabla^n = (\nabla|F)^n \circ p(\nabla, y, F)$$

que nous montrons par récurrence sur n. Ceci est vrai pour $n = 0$, nous supposons que $p(\nabla, y, F) \circ \nabla^n = (\nabla|F)^n \circ p(\nabla, y, F)$ alors :

$$
\begin{aligned}
p(\nabla, y, F) \circ \nabla^{n+1} &= p(\nabla, y, F) \circ \nabla^{n} \circ \nabla \\
&= \nabla|F^{n} \circ p(\nabla, y, F) \circ \nabla \\
&= \nabla|F^{n} \circ \nabla|F \circ p(\nabla, y, F) \\
&= \nabla|F^{n+1} \circ p(\nabla, y, F)
\end{aligned}
$$

Les connexions irréductibles et le lemme d'Euclide

Connexions irréductibles

Définition : soit ∇ une connexion d'un triplet (K, D, E) alors ∇ est dite irréductible si et seulement E est un espace vectoriel ∇-stable minimum.

Corollaire d'irréductibilité de tout polynôme caractéristique de vecteur d'un espace vectoriel ∇-stable minimum : soit ∇ une connexion irréductible d'un triplet (K, D, E) alors $\forall y \in E$ $\kappa(\nabla, y)$ est irréductible.

Preuve : l'assertion qui précède est équivallente au lemme de caractérisation des espaces vectoriels stables minimaux.

La supplémentation diagonalisante des bases caractéristiques stables des sous-espaces vectoriels ∇-stables minimaux prépare le lemme d'Euclide.

Introduction : soient un triplet (K, D, E), ∇ une connexion de E dans E et y un vecteur de E alors l'espace caractéristique stable $Escars(\nabla, y)$ est ∇-stable et s'il n'est pas tout E alors sa base caractéristique $(y, \nabla(y), \dots)$ peut être complétée pour obtenir une base de E par rapport à laquelle la matrice de la connexion est triangulaire inférieure par blocs et il en est de même si $Escars(\nabla, y)$ est ∇-stable minimum et, de plus, le lemme de complétion diagonalisante des bases caractéristiques stables des sous-espaces vectoriels ∇-stables minimaux exprime que dans ce cas il est possible de compléter la base caractéristique $(y, \nabla(y), \dots)$ de façon à obtenir une base de E par rapport à laquelle la matrice de la connexion a deux blocs diagonaux, le premier bloc représentant la connexion dans la base caractéristique de $Escars(\nabla, y)$ et nous prouvons que cette technique permet la préparation du lemme d'Euclide avec $\wedge_g$ comme *produit gauche de «fonctions»*.

Le lemme d'Euclide : soient $P, \; P_1, \; P_2 \in K[D]$ irréductibles et unitaires, si P divise *à gauche* $P_1 \wedge_g P_2$ alors $P = P_1$ ou $P = P_2$.

Preuve : sans perte de généralité nous supposons que $deg(P_1) \geq deg(P_2)$.

- Si $P_2 = P_1$ alors $P_1 \wedge_g P_2 = P_1$ et si P irréductible et unitaire divise *à gauche* P_2 alors $P = P_2 = P_1$.
- Si $P_2 \neq P_1$ alors $P_2 \vee_g P_1 = 1$ et, pour $j = 1, \; 2$, on pose $P_j = \sum_{i=0}^{deg(P_i)} p_{j,i} D^i$ où

$p_{j,deg(P_j)} = 1$ et on appelle C_j la matrice compagnon de $M_{deg(P_j)}(K)$ dont la dernière colonne est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -p_{j,0} \\ \vdots \\ -p_{j,deg(P_j)-1} \end{pmatrix}$.
∇ sera la connexion dont la matrice, exprimée dans la base canonique de $K^{deg(P_2)+deg(P_1)}$ est diagonale par blocs de blocs C_2 et C_1. Les vecteurs $e_{deg(P_2)+1}$ et e_1 de la base canonique de $K^{deg(P_2)+deg(P_1)}$ sont cycliques d'ordre $deg(P_2)$ et $deg(P_1)$ et, parce que $P_2 = \kappa(\nabla, e_{deg(P_2)+1})$ et $P_1 = \kappa(\nabla, e_1)$ sont irréductibles $Escars(\nabla, e_{deg(P_2)+1})$ et $Escars(\nabla, e_1)$ sont ∇-stables minimaux et supplémentaires. Le polynôme annulateur de degré minimum de $e_{deg(P_2)+1} + e_1$ est $P_2 \vee_g P_1 = Q \times P$ et par décomposition sur $Escars(\nabla, e_{deg(P_2)+1}) \oplus Escars(\nabla, e_1)$

$$Q \times P(\nabla)(e_{deg(P_2)+1} + e_1) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(Q \times P(\nabla)(e_1) = 0) \vee (Q \times P(\nabla)(e_{deg(P_2)+1}) = 0)$$

P irréductible est un diviseur *à gauche* du polynôme minimal irréductible P_1 de e_1 ou P_2 de $e_{deg(P_2)+1}$ donc P est associé à P_1 ou P_2 et comme ces polynômes sont unitaires : $P = P_1$ ou $P = P_2$.

Lemme : soient un triplet (K, D, E) et y un vecteur de E alors

$$(\exists s \in \mathbb{N},\ \exists y_1,\ \ldots,\ y_s \in Escars(\nabla, y))$$

$$Escars(\nabla, y) = \oplus_{i=1}^{s} Escars(\nabla, y_i)$$

où $\forall i,\ Escars(\nabla, y_i)$ est ∇-stable minimum.

Preuve : si $Escars(\nabla, y)$ est ∇-stable minimum alors on pose $s = 1$ et $y_1 = y$ et le lemme est démontré sinon $Escars(\nabla, y)$ qui est ∇-stable contient un sous-espace vectoriel V_1 ∇-stable minimum et $\exists y_1 \in Escars(\nabla, y),\ V_1 = Escars(\nabla, y_1)$. On remarquera, au besoin en utilisant la bonne *division euclidienne à gauche* que $y_1 = P(\nabla)(y)$ où $P \in K[D]$ et $deg(P) < deg(\kappa(\nabla, y))$. Soit W_1 tel que $Escars(\nabla, y) = V_1 \oplus W_1$ alors $y = P(\nabla)(y_1) + w_1$ et, puisque $w_1 \in W_1 \subset Escars(\nabla, y)$, en utilisant la bonne *division euclidienne à gauche* $w_1 = Q(\nabla)(y)$ où $Q \in K[D]$ et $deg(Q) < deg(\kappa(\nabla, y))$ et nous avons $y = \underbrace{P(\nabla)(y)}_{y_1 \in V_1} + \underbrace{Q(\nabla)(y)}_{w_1 \in W_1}$. Si, à présent, nous appliquons $\kappa(\nabla, y)(\nabla)$ à y et $\kappa(\nabla, y_1)(\nabla)$ à y_1 nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (1)\ \kappa(\nabla, y) \times P & = & R \times \kappa(\nabla, y) \\ (2)\ \kappa(\nabla, y) \times Q & = & S \times \kappa(\nabla, y) \\ (3)\ \kappa(\nabla, y_1) \times P & = & T \times \kappa(\nabla, y) \end{array} \right.$$

et en en simplifiant l'écriture

$$\begin{cases} (1)\ \kappa P &= R\kappa \\ (2)\ \kappa Q &= S\kappa \\ (3)\ \kappa_1 P &= T\kappa \end{cases}$$

Les égalités (1) et (3) sont équivalentes à

$$\begin{cases} \kappa &= U(\kappa : P) \\ \kappa_1 &= V(\kappa : P) \end{cases}$$

κ_1 est irréductible et unitaire, $\kappa : P$ est un diviseur unitaire d'un polynôme irréductible unitaire donc soit $\kappa : P = \kappa_1$ soit $\kappa : P = 1_K$ $\kappa : P = 1_K$ c'est P est associé κ soit $V_1 = Escars(\nabla, y)$ et $W_1 = \{0\}$ est alors ∇-stable soit $W_1 = V_2 = Escars(\nabla, y_2)$. Si $\kappa : P = \kappa_1$ alors $\kappa_1 \in (\kappa)_g$ soit $\kappa|_g\kappa_1$ soit $\kappa_1 = \kappa$ puisque ces polynômes sont irréductibles et unitaires et, si $\kappa_1 = \kappa$ alors $Escars(\nabla, y) = Escars(\nabla, y)$ est ∇-stable minimum.

Nous avons prouvé que $Escars(\nabla, y) = Escars(\nabla, y_1) \oplus Escars(\nabla, y_2)$ **avec** $Escars(\nabla, y_1)$ **∇-stable minimum et** $y_2 \in Escars(\nabla, y)$ **(éventuellement** y_2 **est nul)**. Ceci amorce une récurrence qui prouve que $\exists s \in \mathbb{N}, Escars(\nabla) = \oplus_{i=1}^{s} Escars(\nabla, y_i)$ avec $y_i \in Escars(\nabla, y)$ et $Escars(\nabla, y_i)$ ∇-stable minimum. L'arrêt de la récurrence provient de ce que chaque $Escars(\nabla, y_i)$ est de dimension finie non-nulle.

Les positions des espaces caractérisiques ∇-stables minimaux.

Lemme : $\forall y_1, y_2 \in E$ si $Escars(\nabla, y_1)$ et $Escars(\nabla, y_2)$ sont ∇-stables minimaux alors soit $Escars(\nabla, y_1) \cap Escars(\nabla, y_2) = \{0\}$ soit $Escars(\nabla, y_1) = Escars(\nabla, y_2)$.

Preuve : $Escars(\nabla, y_1) \cap Escars(\nabla, y_2) = \{0\}$ ou $\exists z \neq 0,\ z \in Escars(\nabla, y_1) \cap Escars(\nabla, y_2)$ le polynôme $\kappa(\nabla, y)$ a alors pour degré $dim(Escars(\nabla, z))$ et puisque $z \in Escars(\nabla, y_1)$ et $z \in Escars(\nabla, y_1)$ il a aussi pour degré $dim(Escars(\nabla, y_1))$ et $dim(Escars(\nabla, y_2))$ et de $Escars(\nabla, z) \subset Escars(\nabla, y_1) \cap Escars(\nabla, y_2)$ l'égalité $Escars(\nabla, y_1) = Escars(\nabla, y_2)$ suit. Nous en déduisons le

Premier théorème de présentation : soit ∇ une connexion sur un triplet (K, D, E) il n'y a qu'un nombre fini d'espaces caractéristiques ∇-stables minimaux, ils sont en somme directe et leur somme est E.

Preuve : la finitude de l'ensemble des espaces caractéristiques ∇-stables minimaux et qu'ils soient en somme directe est une conséquence du lemme qui précède. Soient $Escars(\nabla, y_1), \ldots,$ $Escars(\nabla, y_s)$ ces espaces vectoriels alors si $\oplus_{i=1}^{s} Escars(\nabla, y_i) \subsetneq E$ il existe un espace vectoriel $F \subset E$ tel que $E = \oplus_{i=1}^{s} Escars(\nabla, y_i) \oplus F$.

Soit $z \neq 0 \in F$ alors $Escars(\nabla, z)$ est somme directe d'espaces caractéristiques ∇-stables minimaux, **nécessairement parmi** $\{Escars(\nabla, y_i) | 1 \leq i \leq s\}$ ce qui entraîne que z appartient à l'un des $Escars(\nabla, y_i)$ $(1 \leq i \leq s)$ et contredit qu'il n'y appartient pas.

L'arithmétique élémentaire sur l'anneau des polynômes différentiels et sa présentation par les connexions irréductibles.

Introduction.

Dans un anneau principal commutatif unitaire et intègre, tout élément est produit, unique à une permutation de représentants d'idéaux près, de puissances entières d'éléments irréductibles, un tel anneau est dit factoriel et l'exemple le plus donné est celui des entiers relatifs. La mathématique antique nous a apporté le lemme d'Euclide, toujours enseigné et utilisé de nos jours, qui dit que si un entier relatif premier p *divise le produit* $a \times b$ *alors il divise* a *ou* b*, ce lemme est l'un des lemmes fondateurs de preuves sur les entiers, de la cryptographie numérique et du codage-décodage numérique audiovisuel. Dans cette section nous décrirons comment, au sens du produit gauche* $\wedge_g$ *les anneaux de polynômes sur des corps différentiels sont* *factoriels et donnerons une version élémentaire du lemme d'Euclide pour l'exemple du p.p.c.m. à gauche de polynômes sur des corps différentiels.*

Le lemme du degré du p.p.c.m. de polynômes différentiels irréductibles prépare le lemme d'Euclide à gauche.

Le lemme du degré du p.p.c.m. de polynômes différentiels irréductibles.

Lemme : soient $P_1, \ \ldots, \ P_s \in K[D]$ tous irréductibles alors $deg(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s) \leq \sum_{i=1}^{s} P_i$.
Preuve : par récurrence. Soit $\mathcal{P}(s)$ l'assertion

$$\forall (P_1, \ldots, P_s) \in K[D] \ \textit{irréductibles}$$

$$deg(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s) \leq \sum_{i=1}^{s} deg(P_i)$$

$\mathcal{P}(2)$ est vraie :

$$\begin{aligned} deg(P_1 \wedge_g P_2) &= deg(P_1) + deg(P_2) \\ &\quad -deg(P_1 \vee_g P_2) \\ &= deg(P_1) + deg(P_2) \end{aligned}$$

Si $\mathcal{P}(s)$ est vraie alors

$$\begin{aligned} deg(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_{s+1}) &= deg\left((P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s) \wedge_g P_{s+1}\right) \\ &= deg(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s) \\ &\quad +deg(P_{s+1}) \\ &\quad -deg\left((P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s) \vee_g P_{s+1}\right) \\ &\leq deg(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_s) \\ &\quad +deg(P_{s+1}) \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{s+1} deg(P_i) \end{aligned}$$

A partir des polynômes différentiels $P_1, \ldots, P_s$, supposés unitaires, nous définissons des indices, des matrices, des espaces vectoriels, des connexions vectorielles :

- $\sigma(j) = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} deg(P_i)$.
- C_j est la matrice compagnon d'ordre $deg(P_j)$ de dernier vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_{j,0} \\ \vdots \\ a_{j,deg(P_j)-1} \end{pmatrix}$ si $P_j = D^{deg(P_j)} - \sum_{i=0}^{deg(P_j)-1} a_{j,i} D^i$
- Si $1 \leq r \leq s$ alors nous posons $\mathcal{B}_r = \big(e_1, \ \ldots, \ e_{deg(P_1)+\cdots+deg(P_r)}\big)$ la base canonique du K-espace vectoriel $E_r = K^{deg(P_1)+\cdots+deg(P_r)}$ et nous appelons ∇_r la connexion dont la matrice, exprimée par rapport à la base $\mathcal{B}_r$, est $diag(C_1, \ldots, C_r)$.

Si j et r sont des entiers tels que $1 \leq j \leq r \leq s$ alors

- $P_j = \kappa(\nabla_r, e_{\sigma(j)})$
- $F_j = Escars(\nabla_r, e_{\sigma(j)})$ est un K-espace vectoriel ∇_r-stable minimum de dimension $deg(P_j)$.
- $\big(e_{\sigma(j)}, \ e_{\sigma(j)+1}\big), \ \ldots, \ e_{\sigma(j)+deg(P_j)+1}\big)$ est une base de F_j et le théorème de réunion des bases des sommes d'espaces vectoriels montre alors que $E_r = \oplus_{j=1}^{r} F_j$.

Nous prouvons alors par récurrence $\mathcal{P}(r)$:
($\forall P_1,\ \ldots,\ P_r \in K[D]$ si $P_1, \ldots,\ P_r$ sont irréductibles alors $deg(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_r) = \sum_{i=1}^{r} deg(P_r)$) **et** (si $Q \in K[D]$ est irréductible et $Q|_g P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_r$ alors $\exists j \in \{1,\ \ldots,\ r\}$ $Q = P_j$).

- $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies et nous supposons que $\mathcal{P}(r)$ est vraie.
- Nous prouvons d'abord que $deg(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_{r+1}) = \sum_{j=0}^{r+1} deg(P_j)$ par l'absurde en supposant que

$$deg\,(P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_{r+1}) < \sum_{j=1}^{r+1} deg(P_j)$$

on déduit que

$$deg\left(\underbrace{P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_r) \vee_g P_{r+1}}_{d_{r+1}}\right) > 0$$

Posons (1) $\begin{cases} \mathcal{P}d_{r+1} &= P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_r \\ \mathcal{Q}d_{r+1} &= L_{r+1} \end{cases}$ et utilisons les transporteurs, $\exists \phi,\ \psi \in K[D]$ (2) $\begin{cases} \mathcal{Q} &= \phi \times (P_{r+1} : d_{r+1}) \\ \mathcal{P} &= \psi \times (P_1 \wedge_g \cdots \wedge_g P_r)(P_r : d_{r+1}) \end{cases}$ en mesurant les degrés de chaque terme des systèmes

(1) et (2) on a

$$(3)\begin{cases} deg\,(\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^{n} deg\,(P_j) - deg\,(d_{r+1}) \\ deg\,(\mathcal{Q}) &= deg\,(P_{r+1}) - deg\,(d_{r+1}) \\ deg(\phi) &= deg\,(P_{r+1}) - deg\,(d_{r+1}) \\ & \quad -deg\,(P_r : d_{r+1}) \\ deg(\psi) &= -deg\,(d_{r+1}) - deg\,(P_r : d_{r+1}) \end{cases}$$

et comme la fonction degré est positive on déduit de la quatrième équation du système (3) que $deg(\psi) = deg\,(d_{r+1}) = deg\,(P_r : d_{r+1}) = 0$ ce qui contredit que $deg\,(d_{r+1}) > 0$.

À suivre... pour les yeux de Manon qui est si ϕ