Sous le signe des permutations

Alain Wazner. Pour Hélène, Léo et Corentin

Qu'est ce que caractériser réellement un groupe fini ?

Si on se donne un groupe G **fini** et un espace vectoriel **réel** V alors **caractériser** un groupe c'est se donner **un morphisme de groupe** $\rho : G \to V$. $\rho(G)$ l'image de G génère, **comme ensemble fini**, un espace vectoriel de dimension finie. Par la suite **le caractère réel** d'un groupe fini sera **un morphisme de groupe** $\rho : G \to V$**, où** V **est un espace vectoriel réel de dimension finie**.
Un caractère scalaire réel d'un groupe G **est un morphisme de groupe** $\rho : G \to V$**, où** V **est** $\mathbb{R}$ **ou un espace vectoriel réel de dimension** 1 . Un caractère scalaire d'un groupe G, **par répartition, suivant les opérations de groupe, les images des éléments** g **de** G **le long de la droite réelle, fait se comporter celle-ci à la manière d'une jauge ou d'une sonde géométrique.**

Le morphisme signature comme unique caractère scalaire réel d'un groupe de permutation sur un ensemble fini

Le contexte

On se donne un groupe de permutations sur un ensemble fini et on cherche l'ensemble des caractères scalaires réels **non triviaux**, c.a.d. qui ne sont pas le caractère $Id \ : \ \begin{cases} G \to \mathbb{R} \\ g \in G \mapsto 0 \end{cases}$.

Remarquons que :

- Cette définition du caractère scalaire réel **autorise la valeur nulle** pour la signature d'une permutation **en raison du fait que $\mathbb{R}$ est considéré comme groupe additif de neutre** 0. Suivant les usages, nous appellerons signature la composés $exp \circ \rho$, exp étant l'exponentielle continue. **Une signature sera donc un morphisme** $\varepsilon \ : \ (\mathcal{S}_E, \circ) \to (\mathbb{R}^*, \times)$.
- En se donnant une numération des éléments de E -soit $\Phi \ : \ \{1, \ldots, n\} \to E$- on associe par isomorphisme à toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_E$ la permutation $\Phi^{-1} \circ \sigma \circ \Phi \in \mathcal{S}_n$. Toute signature sur $\mathcal{S}_E$ est donc $\epsilon_{E,\Phi} = \epsilon_n \left(\Phi^{-1} \circ \sigma \circ \Phi\right)$ où ϵ_n est une signature de $\mathcal{S}_n$ et $\sigma \in \mathcal{S}_E$. $\epsilon_{E,\Phi}$ **ne dépend pas de Φ puisque** : si Ψ est une

autre numération de E alors

$$\begin{aligned}
\epsilon_{E,\Psi} &= \epsilon_n\left(\Psi^{-1}\circ\sigma\circ\Psi\right)\\
&= \epsilon_n\left((\Phi^{-1}\circ\Psi)^{-1}\circ(\Phi^{-1}\circ\sigma\circ\Phi)\circ(\Phi^{-1}\circ\Psi)\right)\\
&= \epsilon_n(\Phi^{-1}\circ\Psi)\times\epsilon_n\left(\Phi^{-1}\circ\sigma\circ\Phi\right)\times\frac{1}{\epsilon_n(\Phi^{-1}\circ\Psi)}\\
&= \epsilon_n\left(\Phi^{-1}\circ\sigma\circ\Phi\right)=\epsilon_{E,\Phi}
\end{aligned}$$

L'étude des signatures du groupe des permutations d'un ensemble fini se résume donc à l'étude des signatures de $\mathcal{S}_n$.

Il n'existe qu'une signature non triviale sur $\mathcal{S}_n$

A $\sigma\in\mathcal{S}_n$ on associe le nombre rationnel **non nul** $\varepsilon(\sigma)=\prod\limits_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ alors l'application $\varepsilon:\begin{cases}(\mathcal{S}_n,\circ)\to(\mathbb{Q}^*,\times)\\ \sigma\mapsto\varepsilon(\sigma)\end{cases}$ est un morphisme de groupe.

Preuve : Si $\sigma=Id$ alors $\varepsilon(\sigma)=\prod\limits_{i<j}\frac{j-i}{j-i}=1$.

Si $\sigma,\tau\in\mathcal{S}_n$ alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma\circ\tau) &= \prod_{i<j}\frac{(\sigma\circ\tau)(j)-(\sigma\circ\tau)(i)}{j-i}\\
&= \prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\right)\left(\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}\right)\\
&= \varepsilon(\tau)\times\prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\right)
\end{aligned}$$

Montrons que

$$\prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\right)=\prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\right)(=\varepsilon(\sigma))$$

En remarquant que si $\tau(i) < \tau(j)$ alors $\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} = \frac{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}{\tau(i)-\tau(j)}$ et, en posant $i' = \tau(i)$ et $j' = \tau(j)$, on a

$$(E)\ \prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\right)=\prod_{(i',j')\in I}\left(\frac{\sigma(j')-\sigma(i')}{j'-i'}\right)$$

où I est un ensemble d'indice inclus dans l'ensemble $\{(i',j')/1 \leq i' < j' \leq n\}$. Mais l'égalité E indique que cet ensemble I a même cardinal que l'ensemble $\{(i,j)/1 \leq i < j \leq n\}$ soit $\frac{n(n-1)}{2}$. Comme I est un ensemble de cardinal $\frac{n(n-1)}{2}$ inclus dans l'ensemble $\{(i',j')/1 \leq i' < j' \leq n\}$, également de cardinal $\frac{n(n-1)}{2}$: **I est égal à l'ensemble** $\{(i',j')/1 \leq i' < j' \leq n\}$. Donc

$$\begin{aligned}\prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\right) &= \prod_{i'<j'}\left(\frac{\sigma(j')-\sigma(i')}{j'-i'}\right)\\ &= \prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\right)\end{aligned}$$

d'où $\varepsilon(\sigma\circ\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Si $n > 1$ alors ε a pour image $\{1,-1\}$.
Preuve : $\mathcal{S}_n$ étant un **groupe fini** tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$

a un ordre ; Soit un entier r tel que $\sigma^r = Id$. Il suit que $1 = \varepsilon(Id) = \varepsilon(\sigma^r) = \varepsilon(\sigma)^r$, et de $1 = \varepsilon(\sigma)^r$ on déduit que $\varepsilon(\sigma) = 1$ ou $\varepsilon(\sigma) = -1$. La valeur 1 est atteinte pour $\sigma = Id$ et la valeur -1 pour une transposition (un cycle d'ordre deux).

Si $n > 1$ alors toute signature non triviale sur $\mathcal{S}_n$ est égale à ε.

Preuve : Nous montrons que si $n > 1$ alors il n'existe qu'une seule signature sur $\mathcal{S}_n$, celle-ci sera ε qui en est une.

Comme tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est le composé $\mathcal{C}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{C}_r$ de r cycles élémentaires disjoints, pour toute signature ϕ on a $\phi(\sigma) = \prod_{1 \leq i \leq r} \phi(\mathcal{C}_i)$: **Toute signature est déterminée par ses valeurs sur les cycles élémentaires.**

Dans la suite on appelle cycle impair (respectivement pair) tout cycle élémentaire dont le support a un nombre pair (respectivement impair) d'éléments.

Rappelant que l'ordre d'un cycle est le cardinal de son support on détermine la valeur d'une signature par la propriété qui suit :

- **La valeur de toute signature est $+1$ sur tout cycle pair.**
- **La valeur de toute signature non triviale est -1 sur tout cycle impair.**

Preuve : Nous montrons d'abord que **tout cycle est le composé de transpositions, le parité du nombre de ces transpositions est toujours égale à la parité du cycle :** Car, par un calcul pouvant utiliser une récurrence sur n on peut montrer que

$$\forall n \geq 2,\ (a_1, \ldots, a_n) = (a_1, a_2) \circ \cdots \circ (a_{n-1}, a_n)$$

on en déduit que $\varepsilon\left((a_1, \ldots, a_n)\right) = (-1)^{n-1}$: un cycle pair (respectivement impair) a pour ε-signature $+1$ (respectivement -1). Inversement, comme l'image par la signature ε de toute transposition est -1, tout cycle pair (respectivement impair) est composé d'un nombre **toujours** pair (respectivement impair) de permutations. **Comme tout cycle est engendré par des transpositions dont le support est inclus dans le sien, les transpositions engendrent les groupes de permutations. Tout cycle pair $\mathcal{C}$ a un support dont le cardinal un nombre impair et est donc d'ordre impair que nous notons $o(\mathcal{C})$. De $\mathcal{C}^{o(\mathcal{C})} = Id$, pour toute signature ϕ, $\phi(\mathcal{C})^{o(\mathcal{C})} = 1$, cette équation a pour seule solution $\phi(\mathcal{C}) = 1$ puisque $o(\mathcal{C})$ est impair. Ceci démontre que tout signature a pour valeur 1 sur tout cycle pair**.

On peut conclure que la valeur de toute

signature non triviale est -1 sur tout cycle impair, et donc que toute signature non triviale sur $\mathcal{S}_n$ est ε grâce à ce lemme : si $n \geq 2$ alors l'alternative suivante est vraie :

- **Toute transposition a pour signature 1.**
- **Toute transposition a pour signature -1.**

Preuve : Par récurrence sur n !
Si $n = 2$ alors $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_2 = \{Id, (2,1)\}$. Comme $(2,1) \circ (2,1) = Id$, pour toute signature ϕ, $\phi^2((2,1)) = \phi(Id) = 1$: soit $\phi((2,1)) = 1$ et ϕ est triviale, soit $\phi((2,1)) = -1$ et $\phi = \varepsilon$.
Si $n = 3$ alors deux transpositions distinctes sont (a,b) et (b,c) avec $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$ et on a $(a,b) \circ (b,c) = (a,b,c)$. Si ϕ est une signature alors $\phi((a,b)) \times \phi((b,c)) = \phi((a,b,c)) = 1$: le signe de la valeur de toute signature ϕ est le même pour toute permutation de $\mathcal{S}_3$. **La valeur de toute signature ϕ de toute permutation de $\mathcal{S}_3$ est soit 1 soit -1.**
Nous supposons vraie la propriété $\mathcal{P}_n$: Si $(n \geq 3)$ alors la valeur de toute signature ϕ de toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est soit 1 soit -1. Nous considérons τ_1 et τ_2 deux permutations distinctes de $\mathcal{S}_{n+1}$ alors, puisque $n + 1 \geq 4$:

- Soit $\exists a, b, c \in [1, n+1] \cap \mathbb{N},\ \tau_1 = (a, b)$ *et* $\tau_2 = (b, c)$. Comme $\tau_1 \circ \tau_2 = (a, b, c)$ et que (a, b, c) est un cycle pair, nous en déduisons comme dans le cas où $n = 3$, que toute signature ϕ a même valeur en τ_1 et τ_2.
- Soit $\exists a, b, c, d \in [1, n+1] \cap \mathbb{N},\ \tau_1 = (a, b)$ *et* $\tau_2 = (c, d)$. Comme
  - $(a, b) \circ (b, c)$ est égal à (a, b, c) cycle pair, $\phi((a, b)) = \phi((b, c))$ pour toute signature ϕ.
  - $(b, c) \circ (c, d)$ est égal à (b, c, d) cycle pair, $\phi((b, c)) = \phi((c, d))$ pour toute signature ϕ.

  il suit que $\phi((a, b)) = \phi((c, d))$.

Toute signature a mêmes valeurs sur toutes les permutations. CQFD !